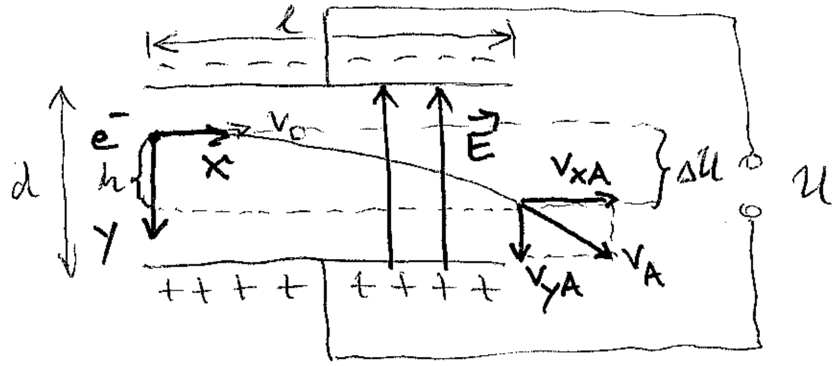
480



Aufstellen der Bewegungsgleichungen

in x-Richtung: $F_x = m \cdot a_x = 0$

in y-Richtung: $F_y = m \cdot a_y = eE = e\frac{U}{d} = \text{const}$

Lösen der Bewegungsgleichungen (durch jeweils zweimalige Integration der Beschleunigungen a_x und a_y nach der Zeit)

In x-Richtung:

$$a_x = 0$$

$$\Rightarrow v_x = \int_0^t a_x\,dt + v_{x0} = v_0 = \text{const}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t v_x\,dt + \cancel{x_0}^{\,0} = v_0 t \qquad (1)$$

in y-Richtung:

$$a_y = \frac{eU}{md} = \text{const}$$

$$\Rightarrow v_y = \int_0^t a_y\,dt + \cancel{v_{y0}}^{\,0} = \frac{eU}{md}\cdot t$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t v_y\,dt + \cancel{y_0}^{\,0} = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}t^2 \qquad (2)$$

Berechnung der Bahnkurve (durch Elimination der Zeit t aus Gleichungen (1) und (2))

aus (1): $t = \frac{x}{v_0}$ → einsetzen in (2):

$$y = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \underbrace{\frac{eU}{2mdv_0^2}}_{\text{const}} x^2 \Rightarrow \text{Parabel!}$$

Berechnung der Geschwindigkeit beim Austritt aus dem Plattenkondensator (Index A für „Austritt")

$$v_x(t) = v_0 = \text{const} \qquad (3)$$

$$v_y(t) = \frac{eU}{md}\,t \qquad (4)$$

die Zeit t ergibt sich aus (1):

$$l = v_0 t \Rightarrow t = \frac{l}{v_0}$$ (gleichförmige Bewegung)

→ einsetzen in (4):

$$v_{yA} = \frac{eU}{md} \cdot \frac{l}{v_0}$$

$$v_{xA} = v_x = v_0$$

die Austrittsgeschwindigkeit v_A ergibt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$v_A = \sqrt{v_{xA}^2 + v_{yA}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eUl}{mdv_0}\right)^2} \qquad (5)$$

Berechnung des Zuwachses an kinetischer Energie vom Eintritt zum Austritt

$$\Delta E_{kin} = \frac{m}{2} v_A^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

$$= \frac{m}{2}\left(\cancel{v_0^2} + \left(\frac{eUl}{mdv_0}\right)^2 - \cancel{v_0^2}\right) = \frac{e^2U^2l^2}{2md^2v_0^2} \qquad (6)$$

Berechnung der Abnahme der potentiellen Energie im elektr. Feld vom Eintritt zum Austritt

- ΔE_{pot} hängt nur von der „durchfallenen" Höhe h im Plattenkondensator ab (y-Richtung)
- die Spannung zwischen zwei Punkten ist proportional zu h wegen $E = \frac{U}{d} = \frac{\Delta U}{h} = \text{const}$

also $\Delta U = h \cdot E = \dfrac{Uh}{d}$

$$\Rightarrow \Delta E_{pot} = -e \cdot \Delta U = -\frac{eUh}{d} \quad (7)$$ (wegen Abnahme der pot. Energie negativ)

- h kann aber mit Gleichung (2) berechnet werden:

$$h = y\left(t = \frac{l}{v_0}\right) = \frac{eU}{2md}\frac{l^2}{v_0^2}$$

- dies in Gleichung (7) eingesetzt, ergibt

$$\Delta E_{pot} = -\frac{e^2 U^2 l^2}{2md^2 v_0^2},$$ (bitte nachrechnen!)

also (!): $\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot}$ (8)

im Vergleich zu Gleichung (6).

Aus (8) folgt:

$$\Delta E_{ges} = \Delta(E_{kin} + E_{pot})$$
$$= \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0,$$

so wie es sein muss, wenn nur konservative Kräfte im Spiel sind.