Übungsserie 8 – Physik II

- Die Übungsaufgaben sind entnommen aus:
  PHYSIK – Beispiele und Aufgaben;
  H. Stroppe, P. Streitenberger, E. Specht, J. Zeitler, H. Langer;
  Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2017.

- Als allgemeine Grundlagen vorrausgesetzt werden die Inhalt aus Physik I sowie übliche mathematische Beziehung (wie der Satz des Phytagoras, trigonometrische Zusammenhänge und Ableiten/Integrieren)

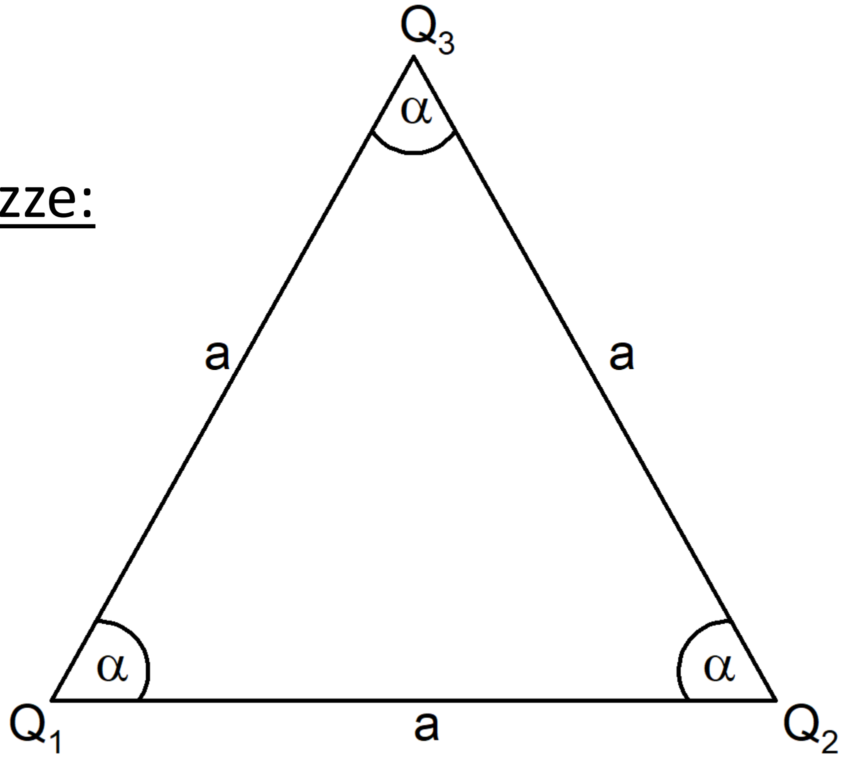
- Die Übung ist fakultativ, es müssen keine Übungsaufgaben abgegeben werden

- Es wird empfohlen die Aufgaben zunächst alleine zu lösen und erst dann mit den Lösungsblatt zu vergleichen (oder das Lösungsblatt zumindest nur für die Ansätze zu nutzen, falls man keine Idee zum Anfangen hat)

- Falls während der Bearbeitung Fragen entstehen, können diese an elias.baron@ovgu.de gestellt werden oder man bespricht sie persönlich im G16-145 (Büro)

486) Aufgabe

Skizze:



Ladungen:

$$Q_1 = +1\mu C$$
$$Q_2 = +2\mu C$$
$$Q_3 = -3\mu C$$

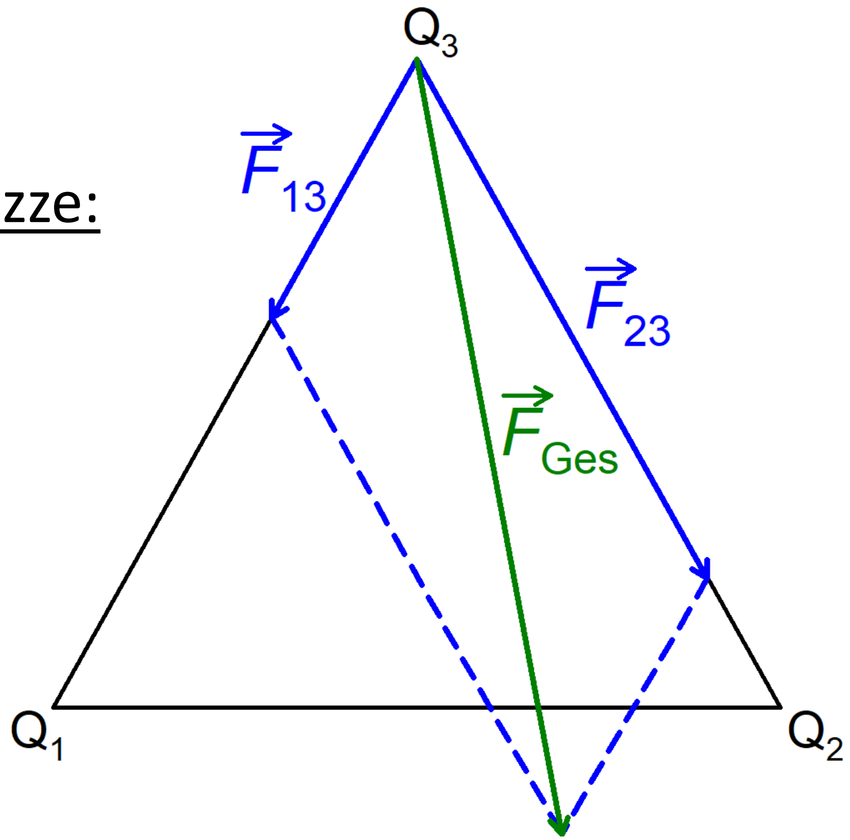
Seiten: a = 10cm

Winkel: α = 60°

Gesucht ist die Kraft $\vec{F}_{Ges}$, mit der Q_1 und Q_2 auf Q_3 wirken.

486) Grundlagen

Skizze:

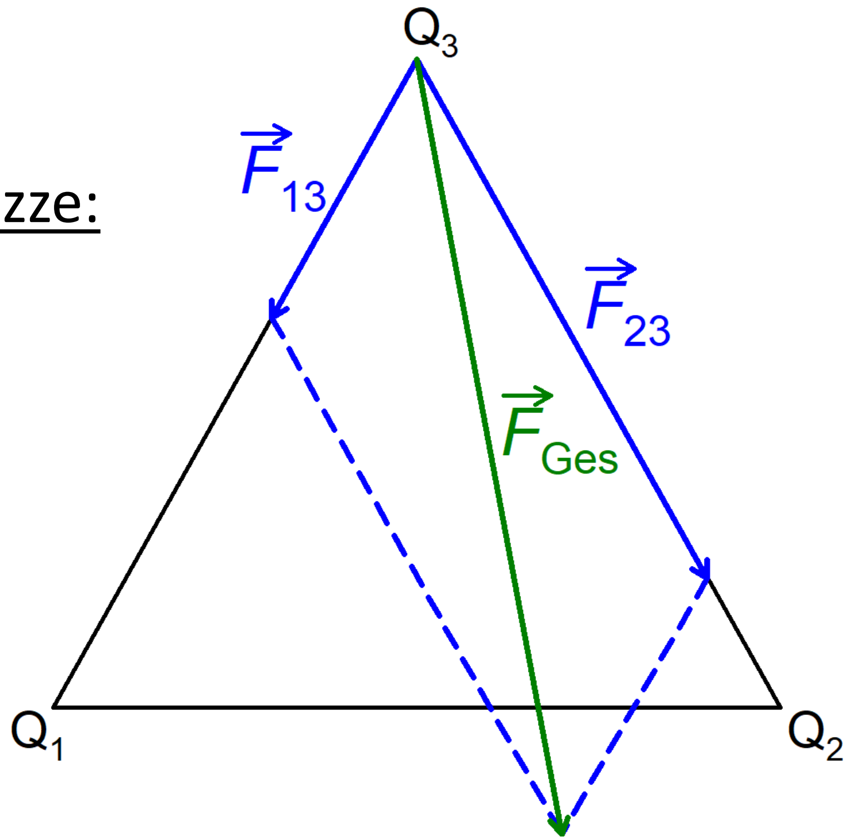


Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

486) Grundlagen

Skizze:



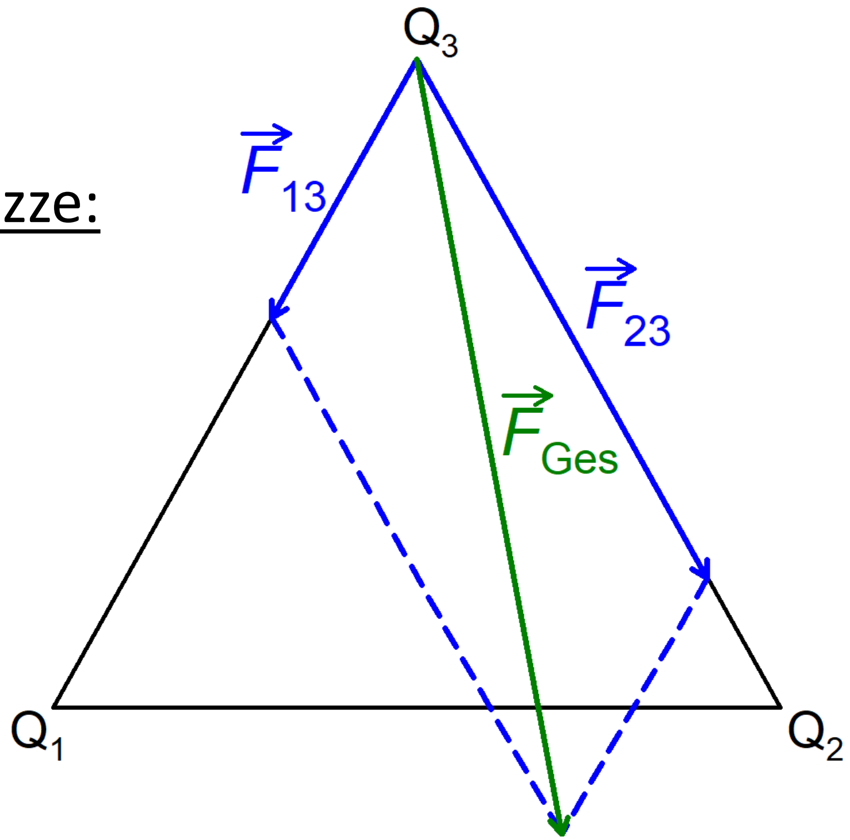
Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ε_0 – Dielektrizitätskonstante
$q_{1,2}$ – Probeladungen
r – Abstand der beiden Ladungen

486) Grundlagen

Skizze:



Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

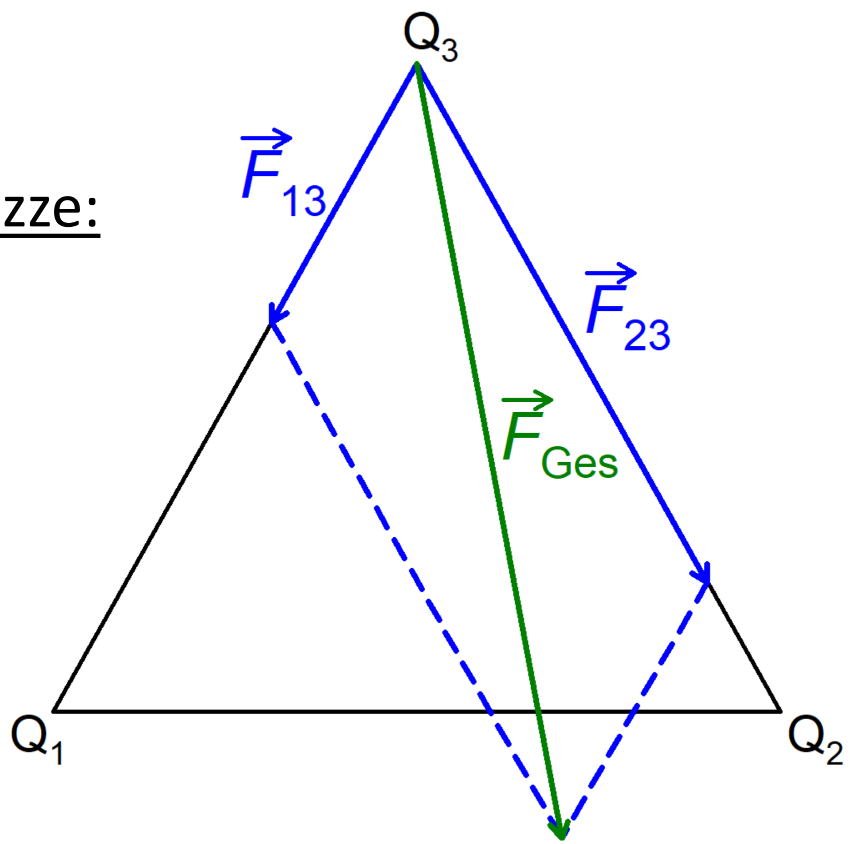
ε_0 – Dielektrizitätskonstante
$q_{1,2}$ – Probeladungen
r – Abstand der beiden Ladungen

Die Gesamtkraft ergibt sich einfach als Addition der einzelnen Kräfte auf Q_3:

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

486) Lösung

Skizze:



Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

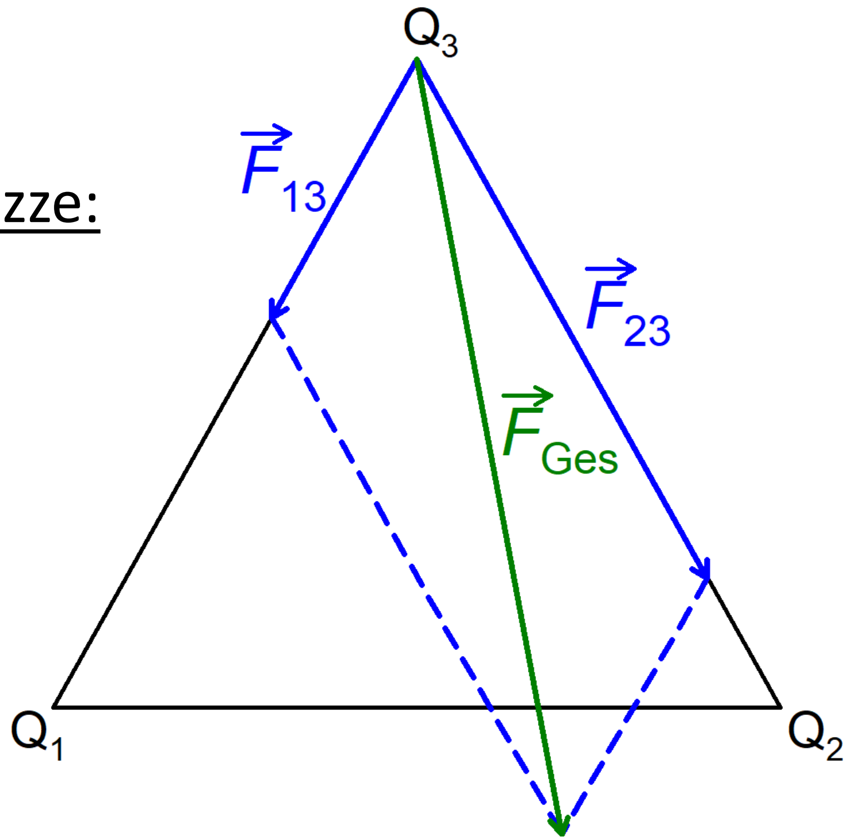
Der Betrag der Kräfte zwischen $Q_{1,2}$ und Q_3 berechnet sich zu:

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{F}_{13}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{F}_{23}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

486) Lösung

Skizze:



Wir wollen nun die Kräfte als Vektoren aufschreiben!

Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

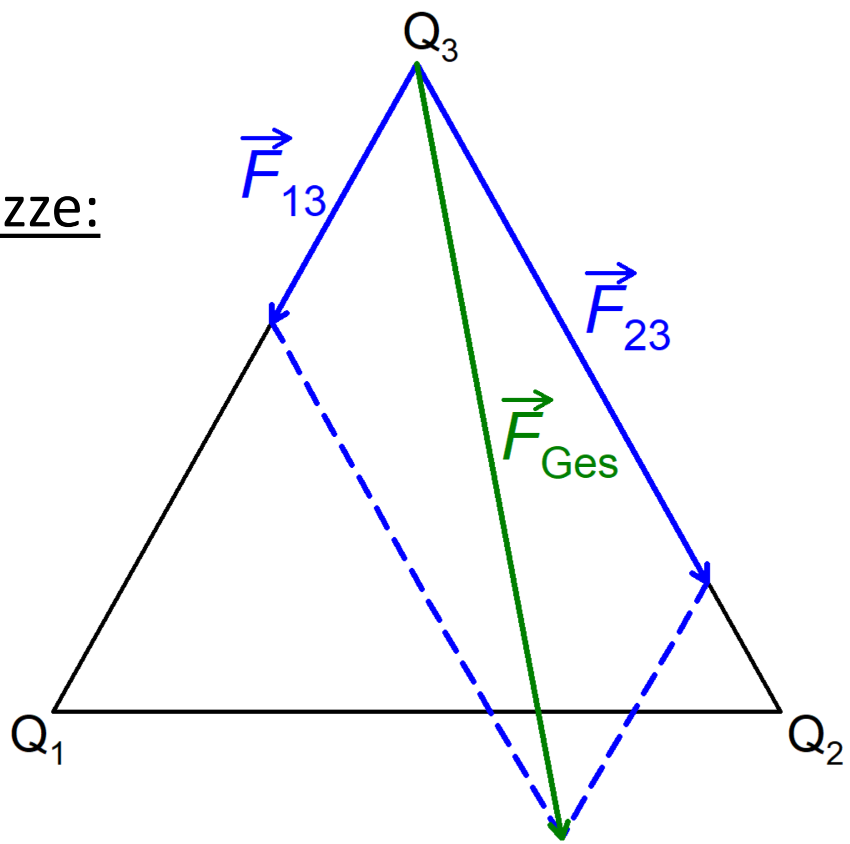
Der Betrag der Kräfte zwischen $Q_{1,2}$ und Q_3 berechnet sich zu:

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{F}_{13}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{F}_{23}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

486) Lösung

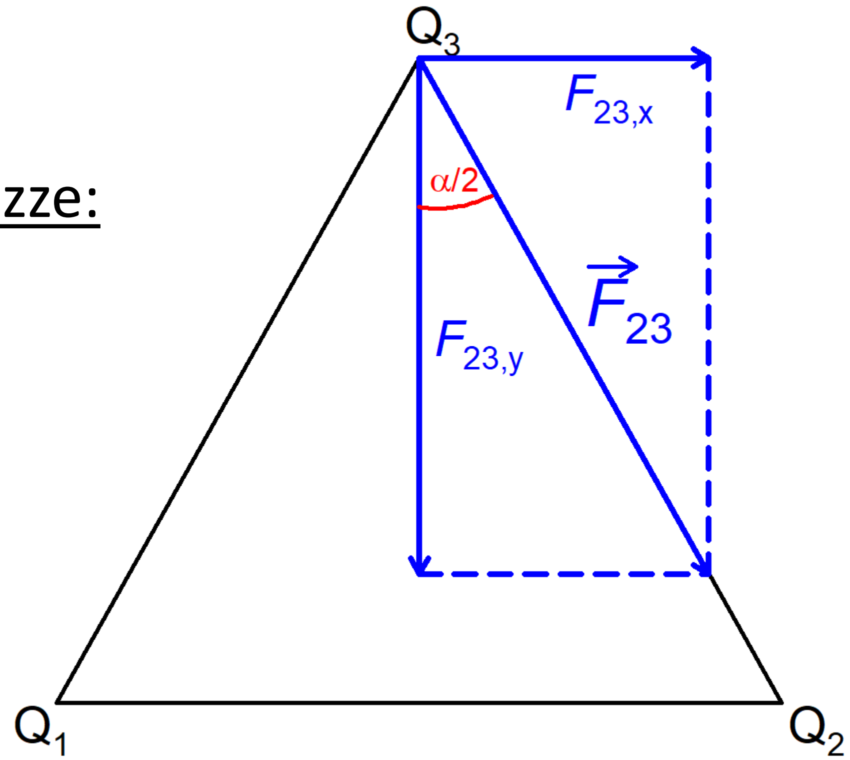
Skizze:



Dazu überlegen wir uns ein xy-Koordinatensystem, dessen 0-Punkt wir in Q_3 setzen.

486) Lösung

Skizze:

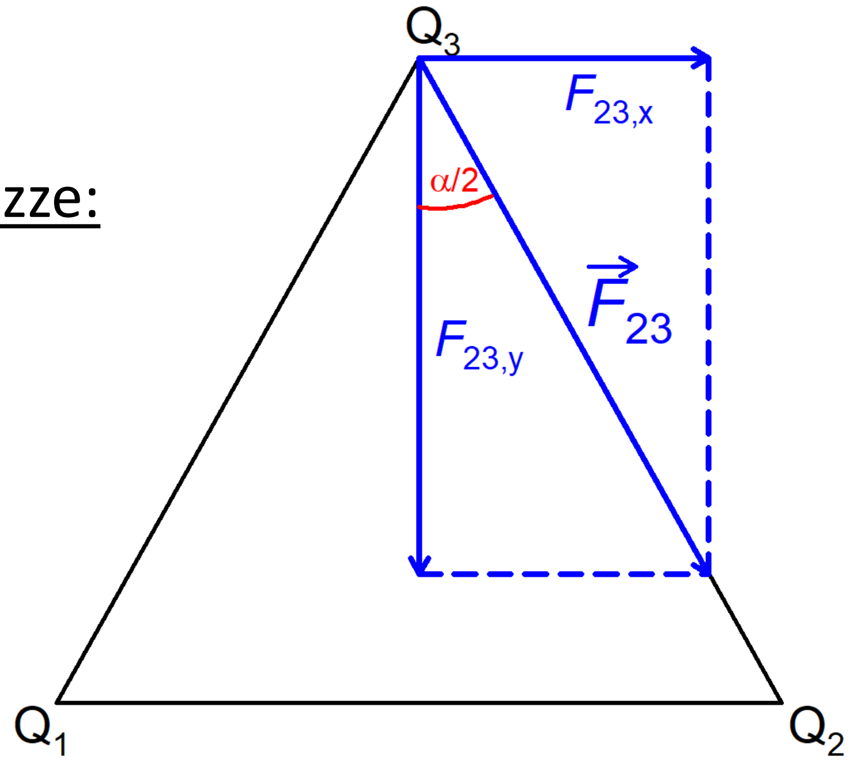


Dazu überlegen wir uns ein xy-Koordinatensystem, dessen 0-Punkt wir in Q_3 setzen.

Die Kraft $\vec{F}_{23}$ zeigt in Richtung von Q_2. Für ein besseres Verständnis zerlegen wir diese Kraft in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung:

486) Lösung

Skizze:



Dazu überlegen wir uns ein xy-Koordinatensystem, dessen 0-Punkt wir in Q_3 setzen.

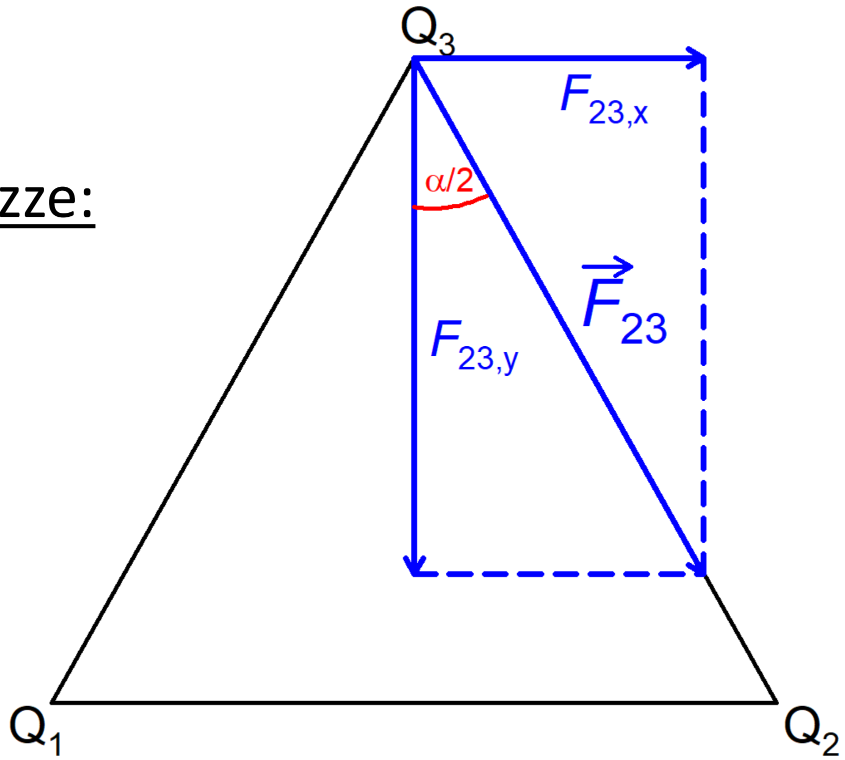
Die Kraft $\vec{F}_{23}$ zeigt in Richtung von Q_2. Für ein besseres Verständnis zerlegen wir diese Kraft in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung:

$$F_{23,x} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (folgt aus Trigonometrie)

$$F_{23,y} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

486) Lösung

Skizze:



Dazu überlegen wir uns ein xy-Koordinatensystem, dessen 0-Punkt wir in Q_3 setzen.

Die Kraft $\vec{F}_{23}$ zeigt in Richtung von Q_2. Für ein besseres Verständnis zerlegen wir diese Kraft in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung:

$$F_{23,x} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (folgt aus Trigonometrie)

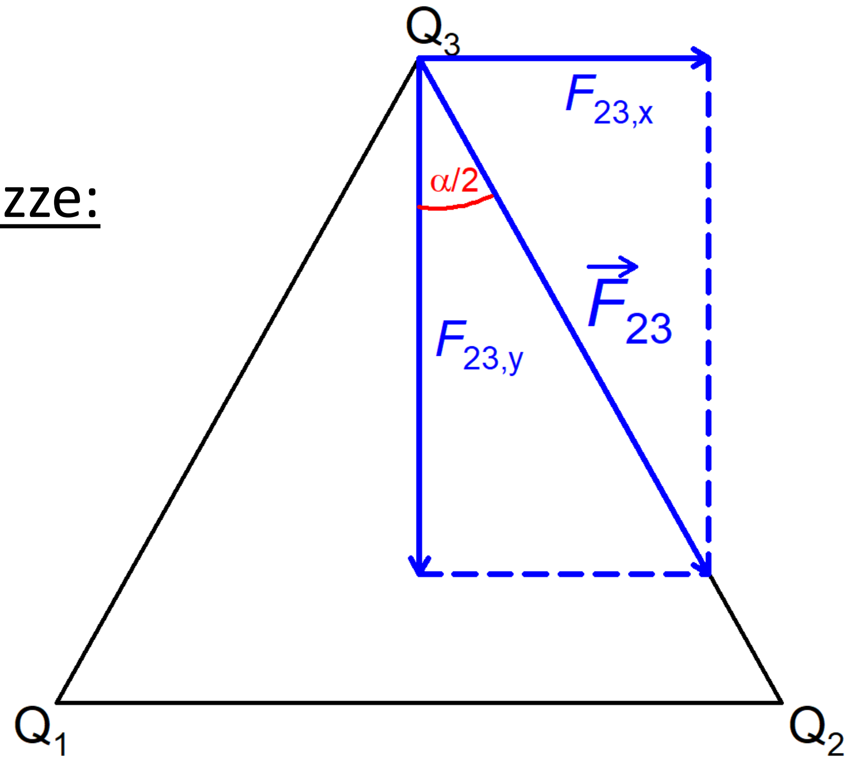
$$F_{23,y} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Somit ergibt sich die Kraft $\vec{F}_{23}$ als Vektor:

$$\vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

Skizze:



Dazu überlegen wir uns ein xy-Koordinatensystem, dessen 0-Punkt wir in Q_3 setzen.

Die Kraft $\vec{F}_{23}$ zeigt in Richtung von Q_2. Für ein besseres Verständnis zerlegen wir diese Kraft in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung.

$$F_{23,x} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (folgt aus Trigonometrie)

$$F_{23,y} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

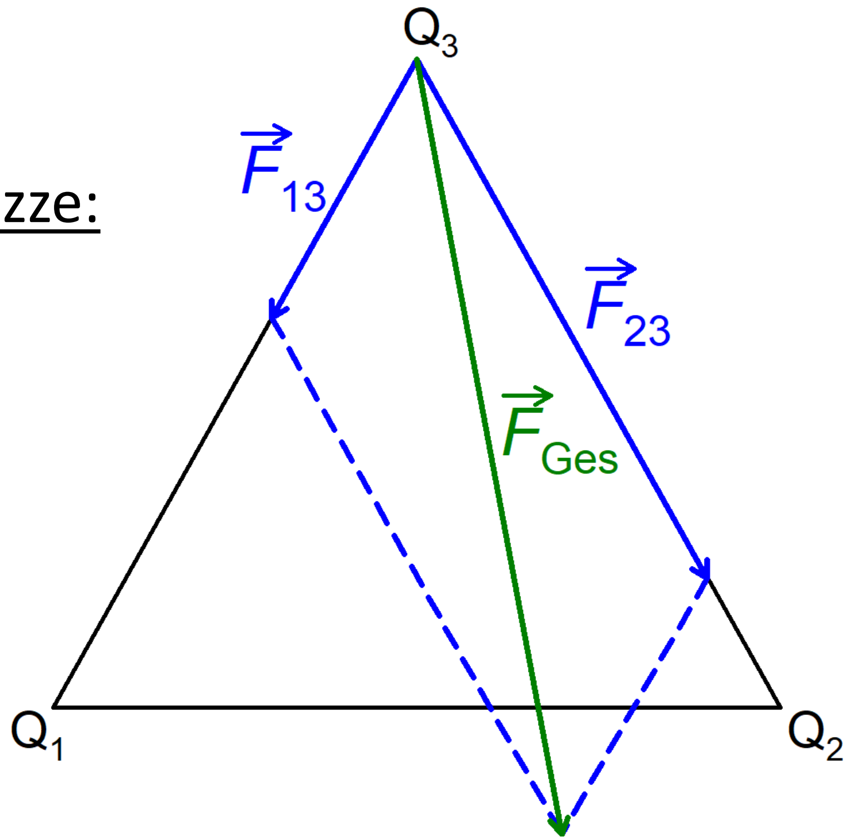
Somit ergibt sich die Kraft $\vec{F}_{23}$ als Vektor:

$$\vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Das Minus muss dahin, weil die y-Komponente nach unten zeigt!

486) Lösung

Skizze:

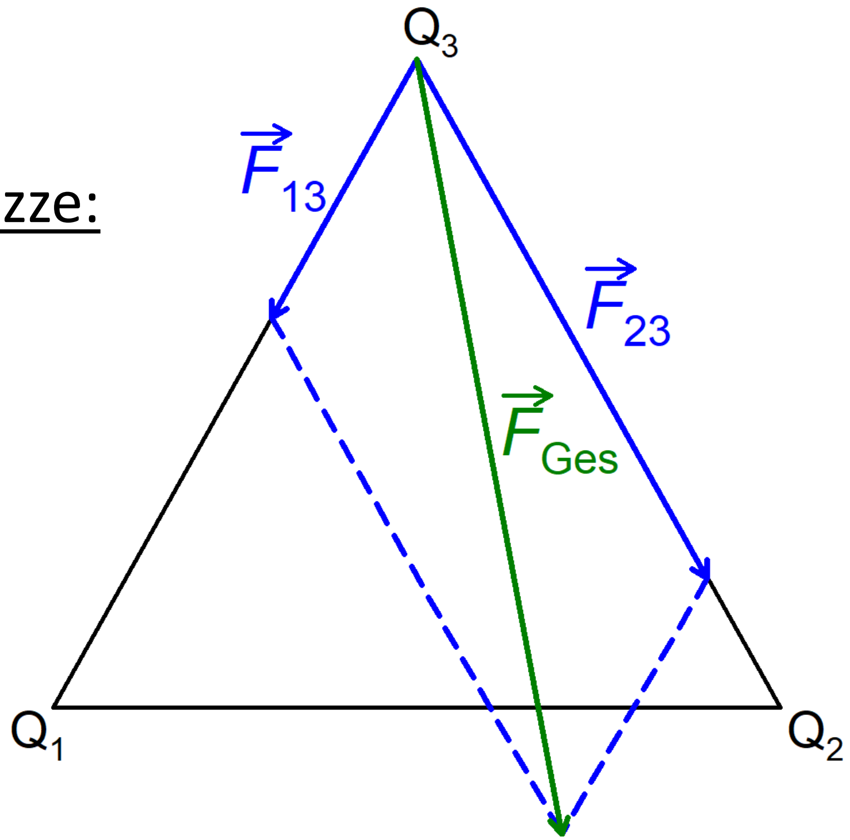


Auf dem selben Weg können wir natürlich auch $\vec{F}_{13}$ als Vektor ausdrücken:

$$\vec{F}_{13} = \begin{pmatrix} -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

Skizze:



Auf dem selben Weg können wir natürlich auch $\vec{F}_{13}$ als Vektor ausdrücken:

$$\vec{F}_{13} = \begin{pmatrix} -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Gesamtkraft ausrechnen.
(nächste Folie)

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{13}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\left|\vec{F}_{23}\right| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -|\vec{F}_{13}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{13}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\vec{F}_{23}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{23}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Vektoraddition

$$= \begin{pmatrix} -|\vec{F}_{13}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + |\vec{F}_{23}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{13}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - |\vec{F}_{23}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -|\vec{F}_{13}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{13}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\vec{F}_{23}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{23}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Vektoraddition

$$= \begin{pmatrix} -|\vec{F}_{13}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + |\vec{F}_{23}| \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -|\vec{F}_{13}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - |\vec{F}_{23}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

sin, cos ausklammern

$$= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(|\vec{F}_{13}| - |\vec{F}_{23}|\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(|\vec{F}_{13}| + |\vec{F}_{23}|\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| - \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| + \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| - \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| + \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

Wenn wir uns nochmal die Gleichungen für $\left|\vec{F}_{13}\right|$ und $\left|\vec{F}_{23}\right|$ ansehen, fällt uns auf, dass diese bis auf Q_1 und Q_2 gleich sind.

$$\left|\vec{F}_{23}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| - \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| + \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

$$\left|\vec{F}_{23}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

Wenn wir uns nochmal die Gleichungen für $\left|\vec{F}_{13}\right|$ und $\left|\vec{F}_{23}\right|$ ansehen, fällt uns auf, dass diese bis auf Q_1 und Q_2 gleich sind.

→ wir können also den Faktor $\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ aus dem Vektor rausziehen

$$\Rightarrow \vec{F}_{Ges} = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (Q_1 - Q_2) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (Q_1 + Q_2) \end{pmatrix}$$

486) Lösung

$$\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| - \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\left|\vec{F}_{13}\right| + \left|\vec{F}_{23}\right|\right) \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

$$\left|\vec{F}_{23}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

Wenn wir uns nochmal die Gleichungen für $\left|\vec{F}_{13}\right|$ und $\left|\vec{F}_{23}\right|$ ansehen, fällt uns auf, dass diese bis auf Q_1 und Q_2 gleich sind.

→ wir können also den Faktor $\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ aus dem Vektor rausziehen

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F}_{Ges} = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (Q_1 - Q_2) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (Q_1 + Q_2) \end{pmatrix}}$$

Vektorschreibweise der Gesamtkraft!
Damit ist die Richtung angegeben.

$$\left[\text{Erinnerung: } \vec{r} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |\vec{r}| = |a| \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right]$$

486) Lösung

Jetzt müssen wir nur noch den Betrag der Gesamtkraft ausrechnen:

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 - Q_2)^2 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 + Q_2)^2}$$

486) Lösung

$\left[\text{Erinnerung: } \vec{r} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |\vec{r}| = |a| \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right]$

Jetzt müssen wir nur noch den Betrag der Gesamtkraft ausrechnen:

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 - Q_2)^2 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 + Q_2)^2}$$

Theoretisch könnte man jetzt bereits die Werte in den Taschenrechner eingeben und das Ergebnis ausrechnen...
Stattdessen wollen wir aber versuchen diesen komplizierten Ausdruck etwas zu vereinfachen!

486) Lösung

Jetzt müssen wir nur noch den Betrag der Gesamtkraft ausrechnen:

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 - Q_2)^2 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 + Q_2)^2}$$

Ausmultiplizieren

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + Q_2^2) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)}$$

486) Lösung

Jetzt müssen wir nur noch den Betrag der Gesamtkraft ausrechnen:

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 - Q_2)^2 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1 + Q_2)^2}$$

Ausmultiplizieren

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + Q_2^2) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)}$$

$$\left[\sin^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Erst Ausmultiplizieren, dann Ausklammern von Q_1^2, Q_2^2 und $-2Q_1Q_2$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2(\sin^2 + \cos^2) + Q_2^2(\sin^2 + \cos^2) - 2Q_1Q_2(\sin^2 - \cos^2)}$$

486) Lösung

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2(\sin^2 + \cos^2) + Q_2^2(\sin^2 + \cos^2) - 2Q_1Q_2(\sin^2 - \cos^2)}$$

486) Lösung

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2(\sin^2 + \cos^2) + Q_2^2(\sin^2 + \cos^2) - 2Q_1Q_2(\sin^2 - \cos^2)}$$

Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

486) Lösung

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2(\sin^2 + \cos^2) + Q_2^2(\sin^2 + \cos^2) - 2Q_1Q_2(\sin^2 - \cos^2)}$$

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

486) Lösung

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

486) Lösung

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = \left|\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right| \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

Werte in Taschenrechner eingeben: (auf Einheiten achten!)

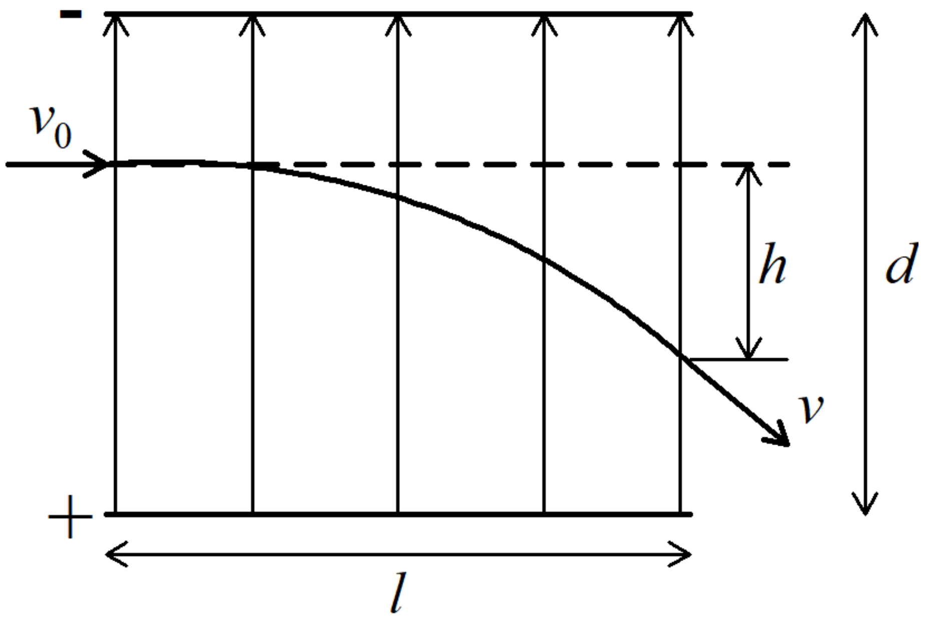
$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{Ges}\right| = 7.134\mathrm{N}$$

Fertig ☺

(nächste Aufgabe)

480) Aufgabe

Skizze:



Kondensator:

$l = 10\text{cm}$
$d = 4\text{cm}$
$U = 300\text{V}$

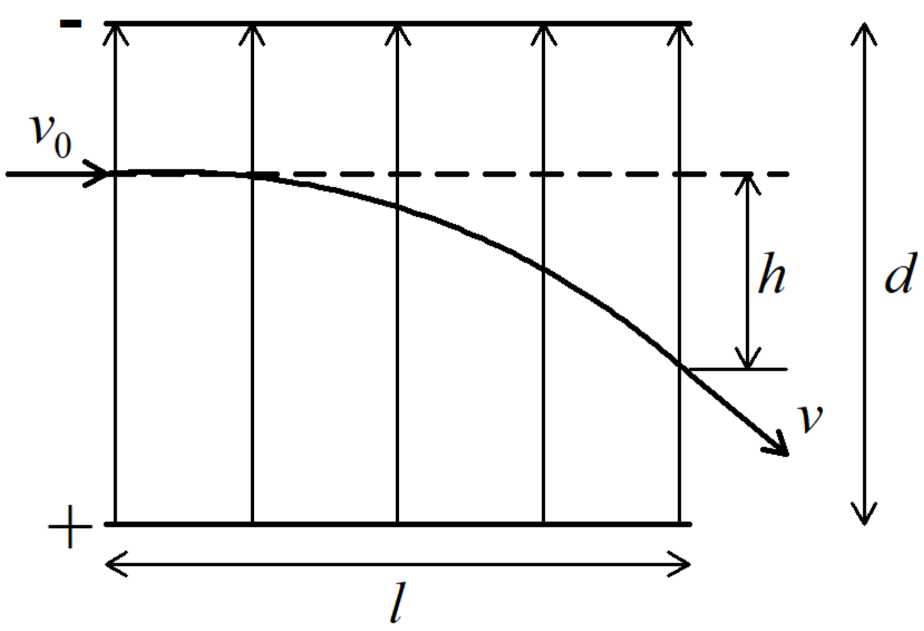
Elektron: $v_0 = 1{,}6 \times 10^7 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gesucht ist:

a) die Art der Bahnkurve
b) die Geschwindigkeit v des Elektrons beim Austreten aus dem Kondensator
c) die Abweichung h
d) der Änderung der Gesamtenergie ΔE

480) Grundlagen

Skizze:



Elektrische Kraft:

$$F_{\text{ele}} = qE$$

q – Ladung
E – elektr. Feldstärke

Elektrische Feldstärke eines Plattenkondensators:

$$E = \frac{U}{d}$$

U – Spannung
d – Plattenabstand

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

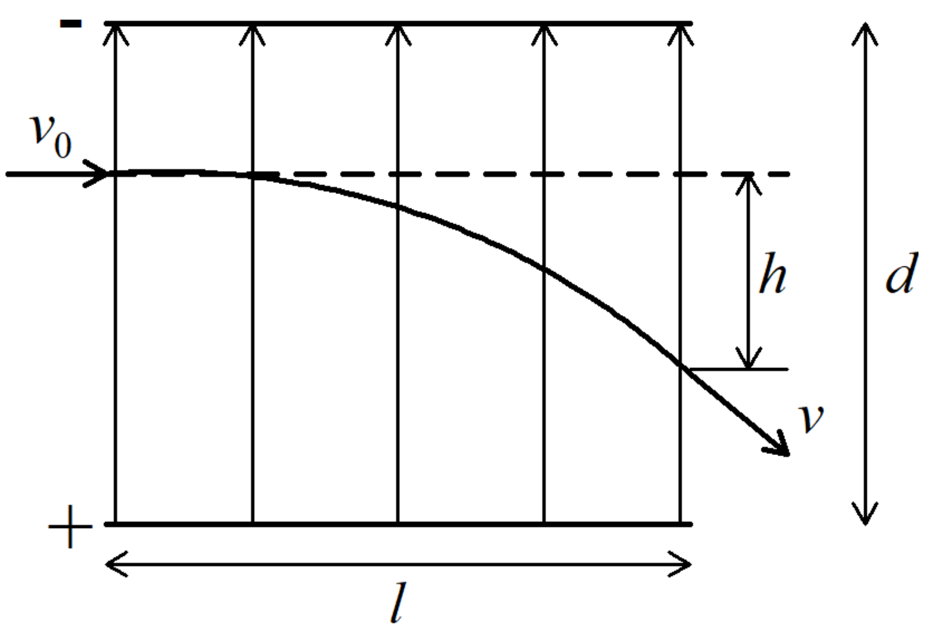
$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

$$v = at + v_0$$

$$a = const.$$

480) Lösung a)

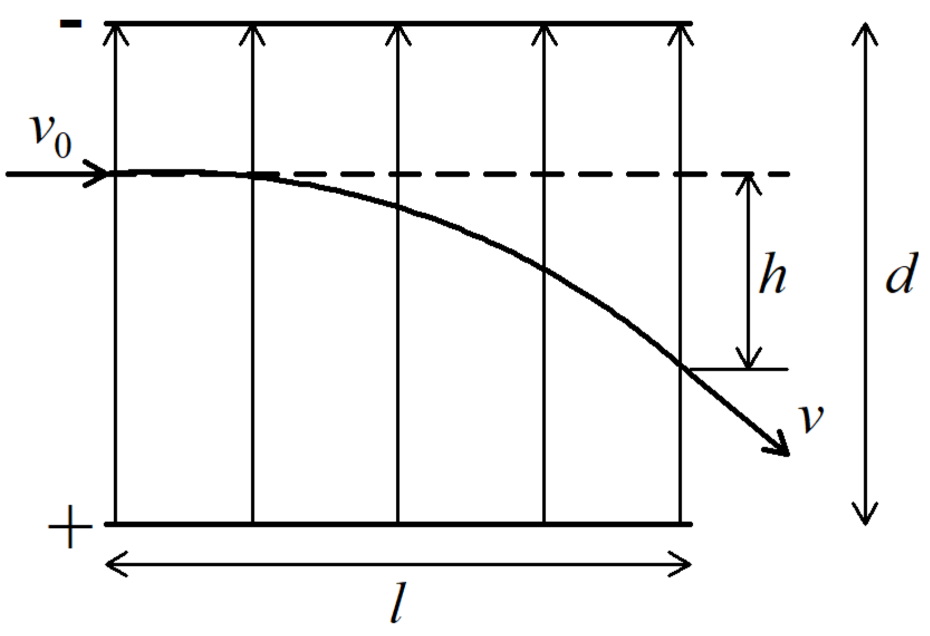
Skizze:



Auf das Elektron wirkt beim Durchfliegen des Kondensators nur die elektrische Kraft. Diese lenkt das Elektron nach „unten“ ab (siehe Skizze).

480) Lösung a)

Skizze:

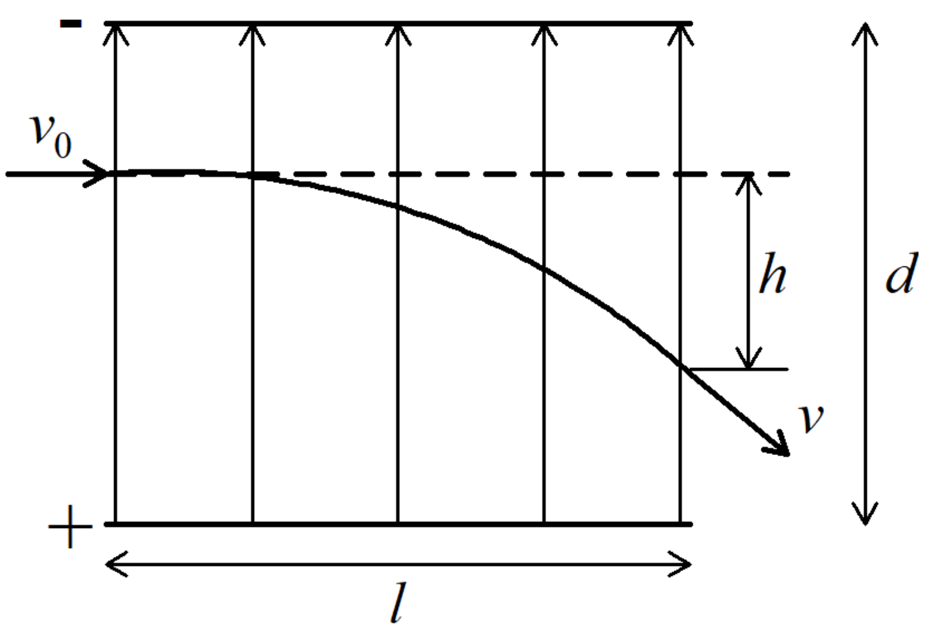


Auf das Elektron wirkt beim Durchfliegen des Kondensators nur die elektrische Kraft. Diese lenkt das Elektron nach „unten“ ab (siehe Skizze).

Da hier nur diese eine Kraft wirkt, kann man den ganzen Prozess mit dem waagerechten Wurf aus der Mechanik vergleichen! Auch bei diesem wirkt nur eine Kraft, die Gewichtskraft, die den Körper nach „unten“ ablenkt.

480) Lösung a)

Skizze:



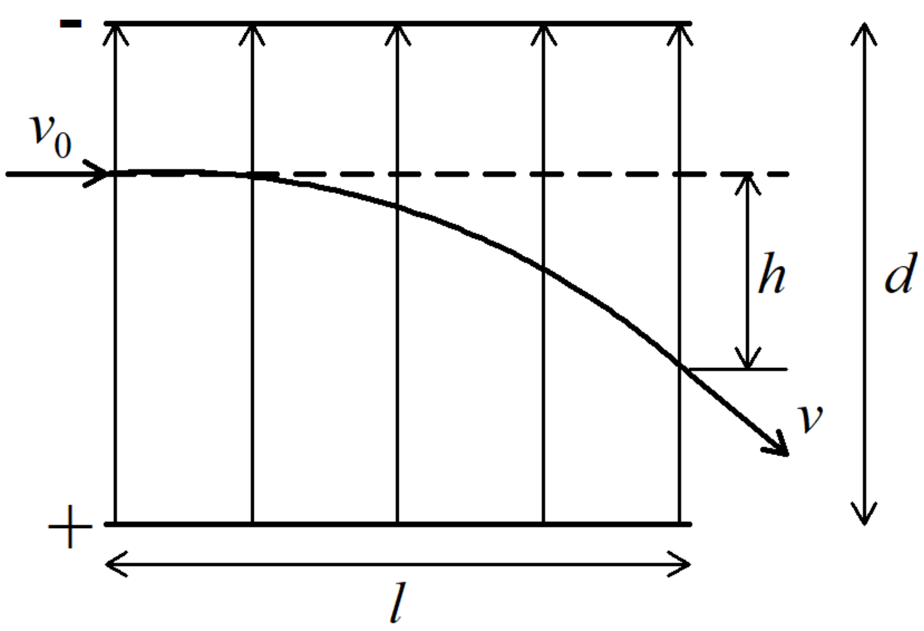
Auf das Elektron wirkt beim Durchfliegen des Kondensators nur die elektrische Kraft. Diese lenkt das Elektron nach „unten“ ab (siehe Skizze).

Da hier nur diese eine Kraft wirkt, kann man den ganzen Prozess mit dem waagerechten Wurf aus der Mechanik vergleichen! Auch bei diesem wirkt nur eine Kraft, die Gewichtskraft, die den Körper nach „unten“ ablenkt.

Beim waagerechten Wurf handelt es sich im eine *parabelförmige* Bahnkurve.

480) Lösung a)

Skizze:



Auf das Elektron wirkt beim Durchfliegen des Kondensators nur die elektrische Kraft. Diese lenkt das Elektron nach „unten“ ab (siehe Skizze).

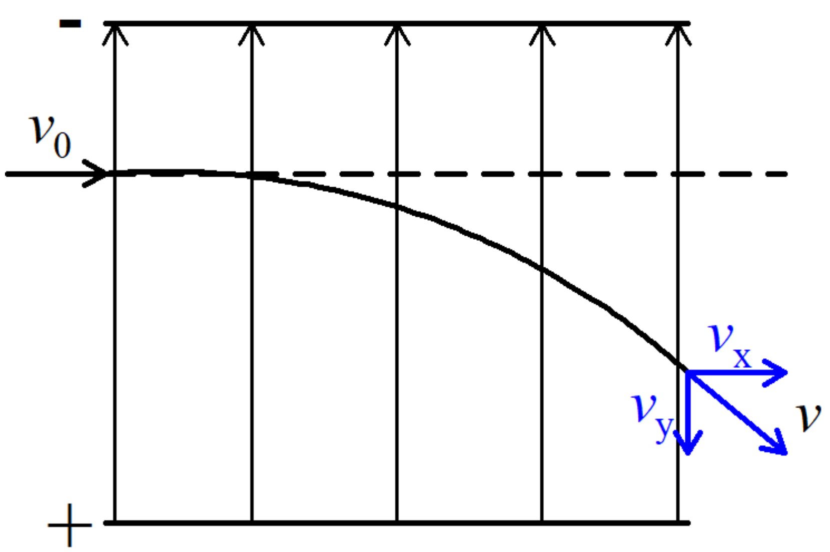
Da hier nur diese eine Kraft wirkt, kann man den ganzen Prozess mit dem waagerechten Wurf aus der Mechanik vergleichen! Auch bei diesem wirkt nur eine Kraft, die Gewichtskraft, die den Körper nach „unten“ ablenkt.

Beim waagerechten Wurf handelt es sich im eine *parabelförmige* Bahnkurve.

Demnach kann man analog sagen, dass die Bahnkurve des Elektron eine **Parabel** beschreiben wird.

480) Lösung b)

Skizze:

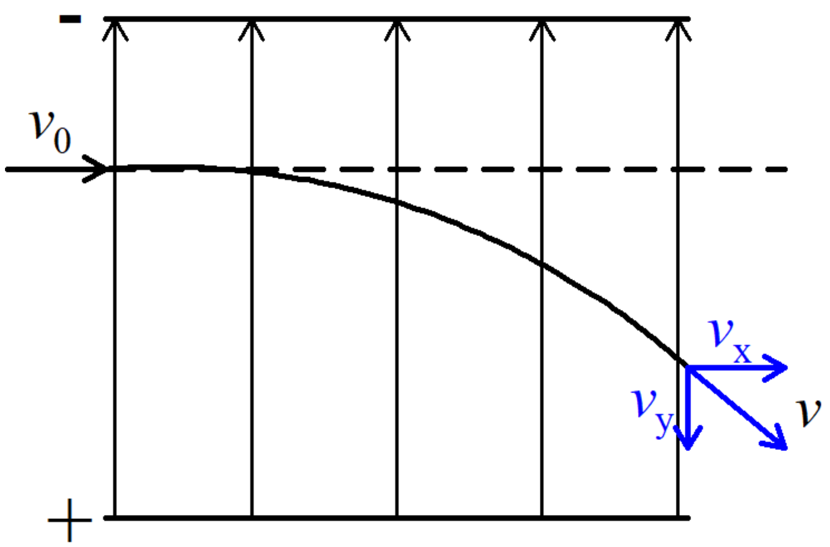


Beim Austreten aus dem Kondensator hat das Elektron nun nicht mehr nur eine waagerechte, sondern auch noch eine vertikale Geschwindigkeit.

In Vektor-Schreibweise ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

480) Lösung b)

Skizze:



Beim Austreten aus dem Kondensator hat das Elektron nun nicht mehr nur eine waagerechte, sondern auch noch eine vertikale Geschwindigkeit.

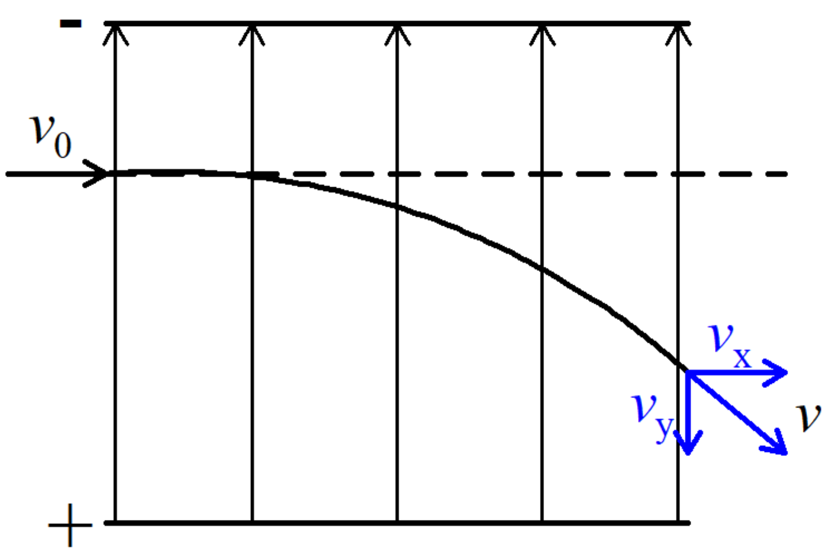
In Vektor-Schreibweise ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Woraus folgt:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

480) Lösung b)

Skizze:



Beim Austreten aus dem Kondensator hat das Elektron nun nicht mehr nur eine waagerechte, sondern auch noch eine vertikale Geschwindigkeit.

In Vektor-Schreibweise ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Woraus folgt:

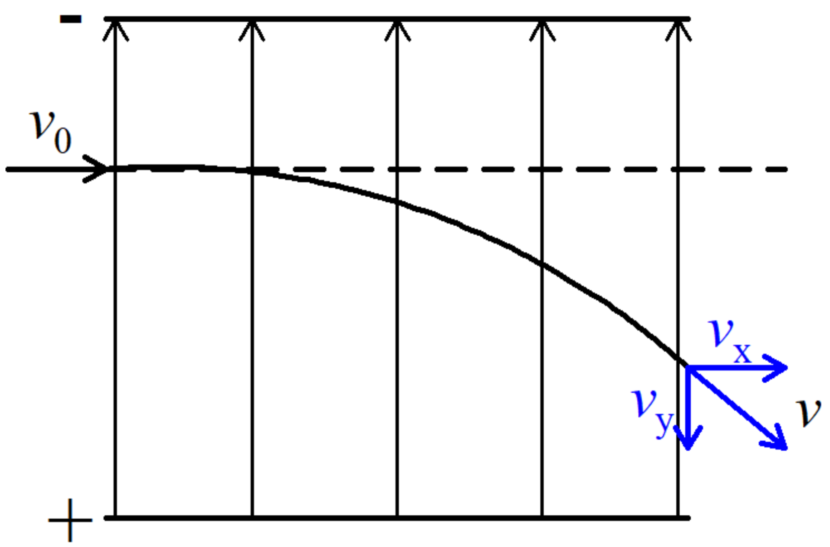
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Da das Elektron in x-Richtung keine Abbremsende Kraft erfährt, wird sich die x-Geschwindigkeit des Elektron v_x beim Durchfliegen nicht ändern. Somit gilt:

$$v_0 = v_x$$

480) Lösung b)

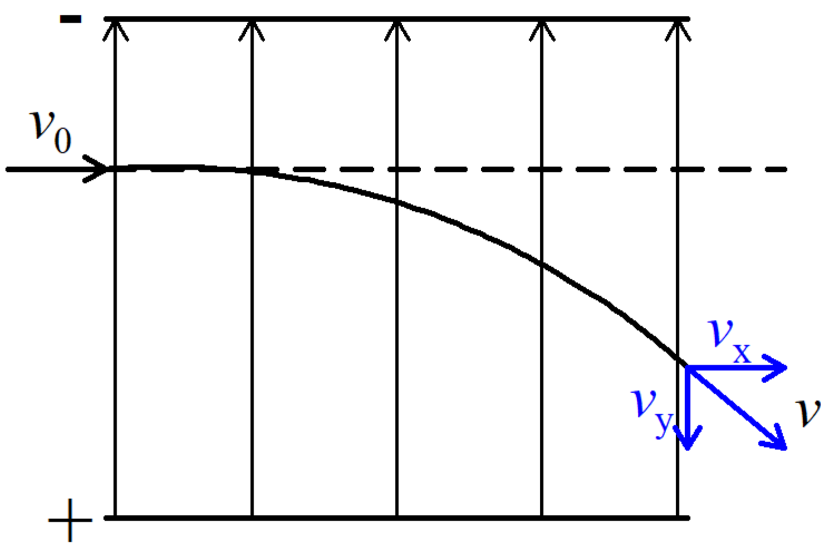
Skizze:



In y-Richtung erfährt das Elektron jedoch eine Kraft und wird deswegen beschleunigt!

480) Lösung b)

Skizze:



In y-Richtung erfährt das Elektron jedoch eine Kraft und wird deswegen beschleunigt!

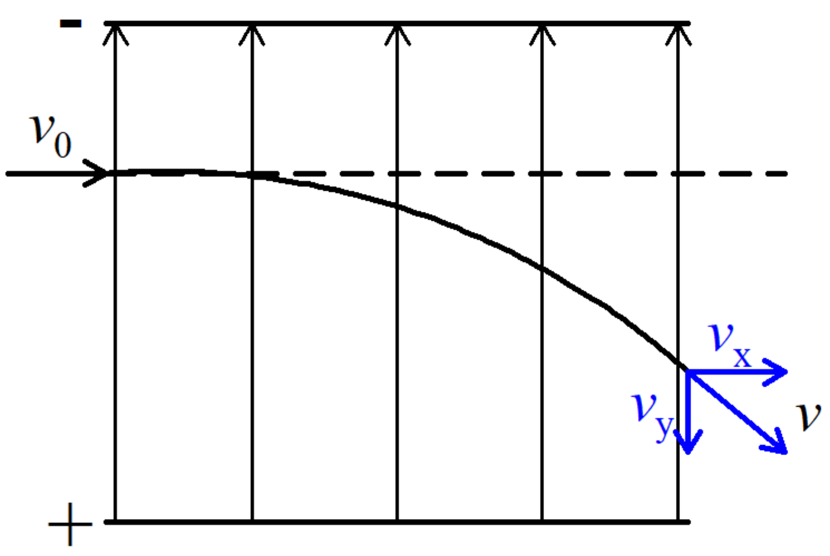
Stellen wir die Bewegungsgleichung auf:

$$F = F_{\text{ele}}$$

$$\Rightarrow ma = qE$$

480) Lösung b)

Skizze:



In y-Richtung erfährt das Elektron jedoch eine Kraft und wird deswegen beschleunigt!

Stellen wir die Bewegungsgleichung auf:

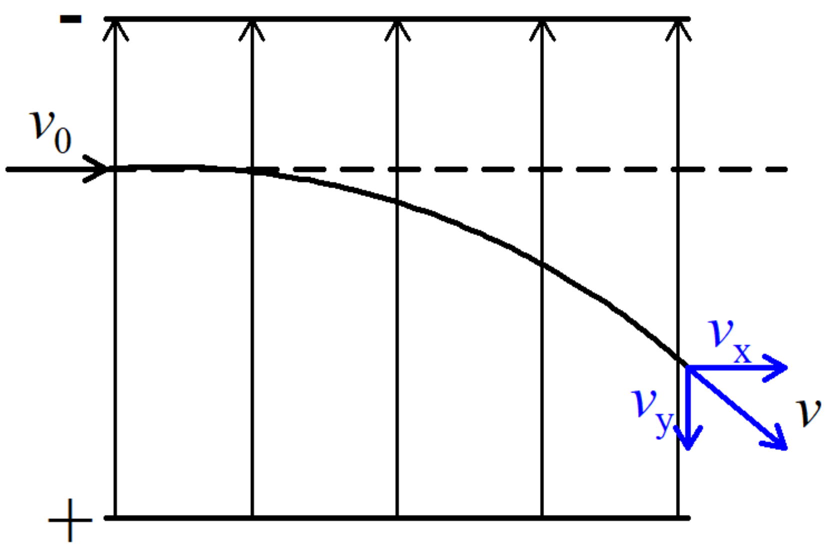
$$F = F_{\mathrm{ele}}$$

$$\Rightarrow ma = qE$$

Da wir hier nur ein einzelnes Elektron betrachten, ist $m = m_{\mathrm{e}} = 9{,}109 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$ die Ruhemasse des Elektrons und $q = e = 1{,}602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$ die Elementarladung.

480) Lösung b)

Skizze:



In y-Richtung erfährt das Elektron jedoch eine Kraft und wird deswegen beschleunigt!

Stellen wir die Bewegungsgleichung auf:

$$F = F_{\text{ele}}$$

$$\Rightarrow ma = qE$$

Da wir hier nur ein einzelnes Elektron betrachten, ist $m = m_\text{e} = 9{,}109 \times 10^{-31}\text{kg}$ die Ruhemasse des Elektrons und $q = e = 1{,}602 \times 10^{-19}\text{C}$ die Elementarladung.

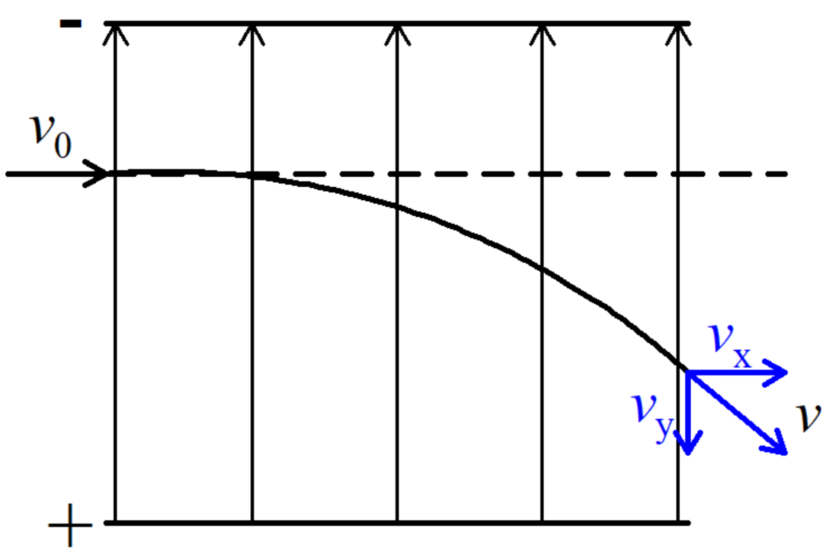
Um die y-Geschwindigkeit des Elektrons zu berechnen brauchen wir zum Einen die Beschleunigung die das Elektron erfährt, zum Andern die Zeit die das Elektron beschleunigt wird.

$$v_y = at$$

(Da das Elektron keine Anfangsgeschwindigkeit in y–Richtung hat, ist $v_{y,0} = 0$)

480) Lösung b)

Skizze:

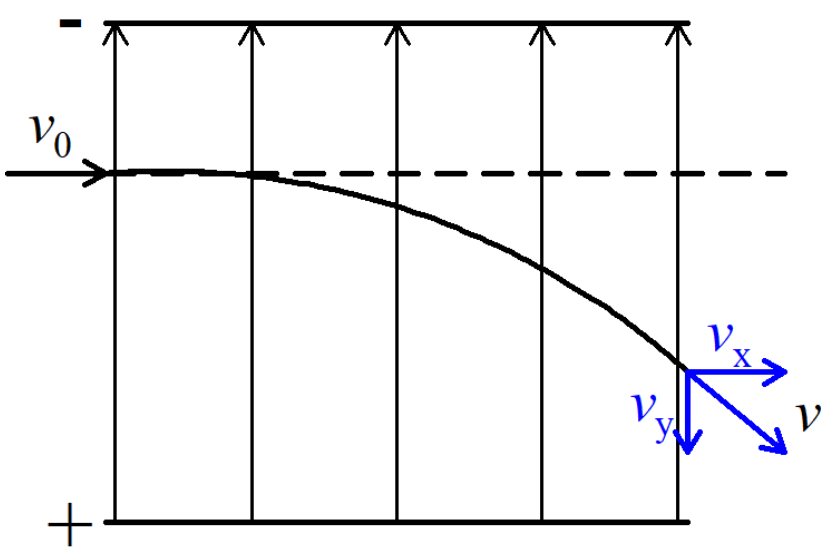


Für die Beschleunigung stellen wir die Bewegungsgleichung einfach nach a um:

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

480) Lösung b)

Skizze:



Für die Beschleunigung stellen wir die Bewegungsgleichung einfach nach a um:

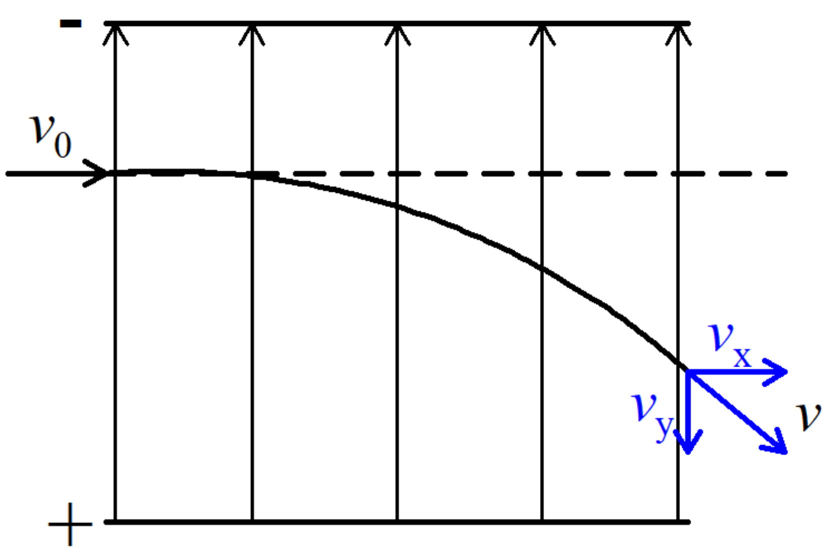
$$a = \frac{eE}{m_e}$$

Aus dem Zusammenhang von Spannung und Feldstärke im Plattenkondensator können wir dann schreiben:

$$\Rightarrow a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU}{m_e d}$$

480) Lösung b)

Skizze:



Für die Beschleunigung stellen wir die Bewegungsgleichung einfach nach a um:

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

Aus dem Zusammenhang von Spannung und Feldstärke im Plattenkondensator können wir dann schreiben:

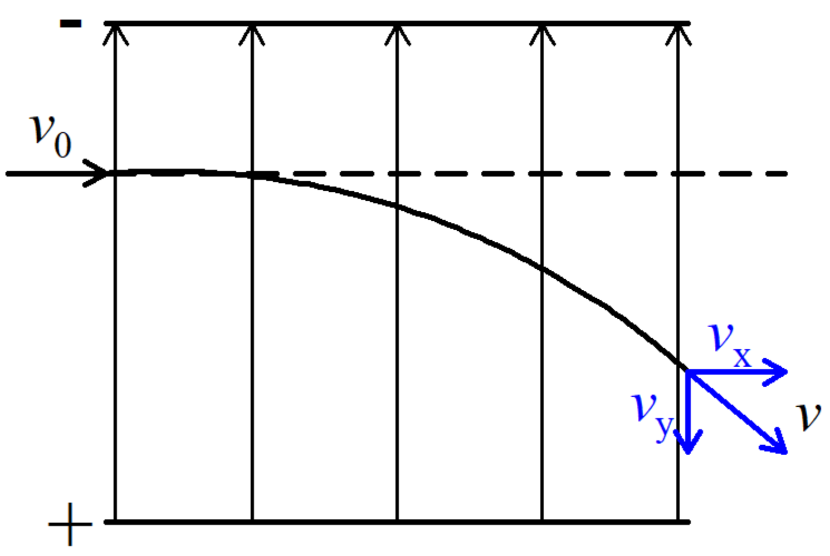
$$\Rightarrow a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU}{m_e d}$$

Die Zeit, die das Elektron braucht um durch den Kondensator zu fliegen, ergibt sich aus der gleichförmigen Bewegung in x-Richtung:

$$v_x = \frac{l}{t} = v_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{v_0}$$

480) Lösung b)

Skizze:

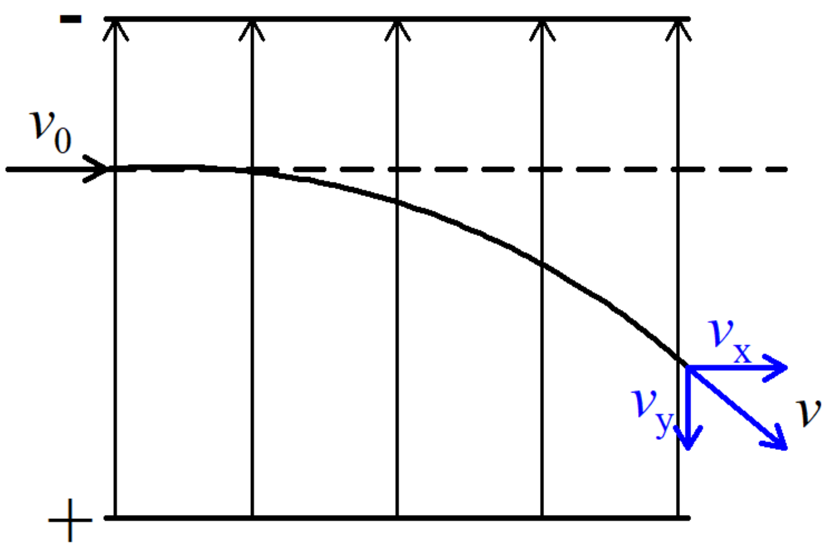


Setzt man die Ergebnisse für a und t in die Gleichung für v_y ein, so erhält man:

$$v_y = at = \frac{eU}{m_e d} \cdot \frac{l}{v_0} \left(= 0.824 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

480) Lösung b)

Skizze:



Setzt man die Ergebnisse für a und t in die Gleichung für v_y ein, so erhält man:

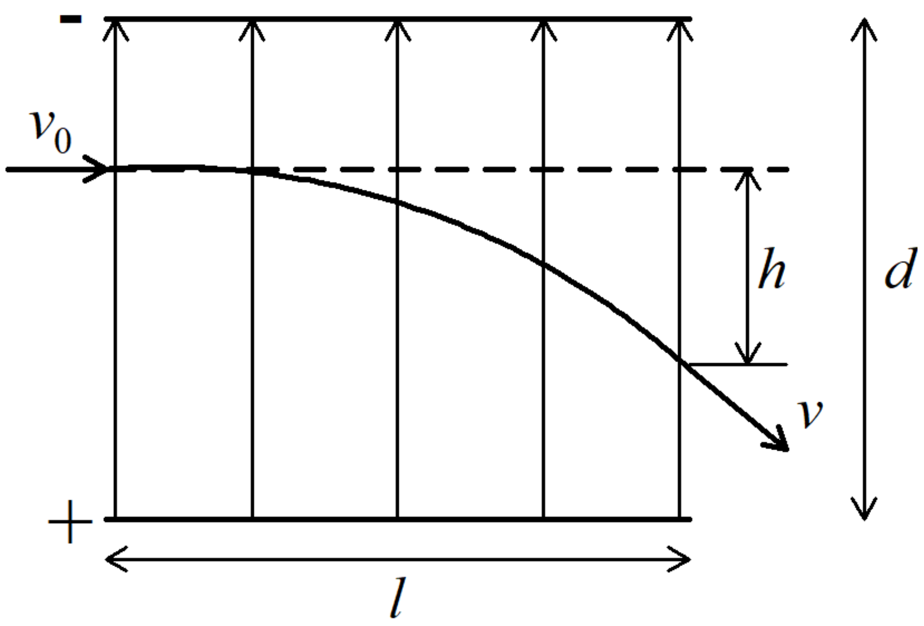
$$v_y = at = \frac{eU}{m_\mathrm{e}d} \cdot \frac{l}{v_0} \left(= 0.824 \times 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtgeschwindigkeit v :

$$\underline{\underline{v = \sqrt{v_0^2 + \frac{e^2U^2l^2}{m_\mathrm{e}^2 d^2 v_0^2}} = 1{,}8 \times 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

480) Lösung c)

Skizze:



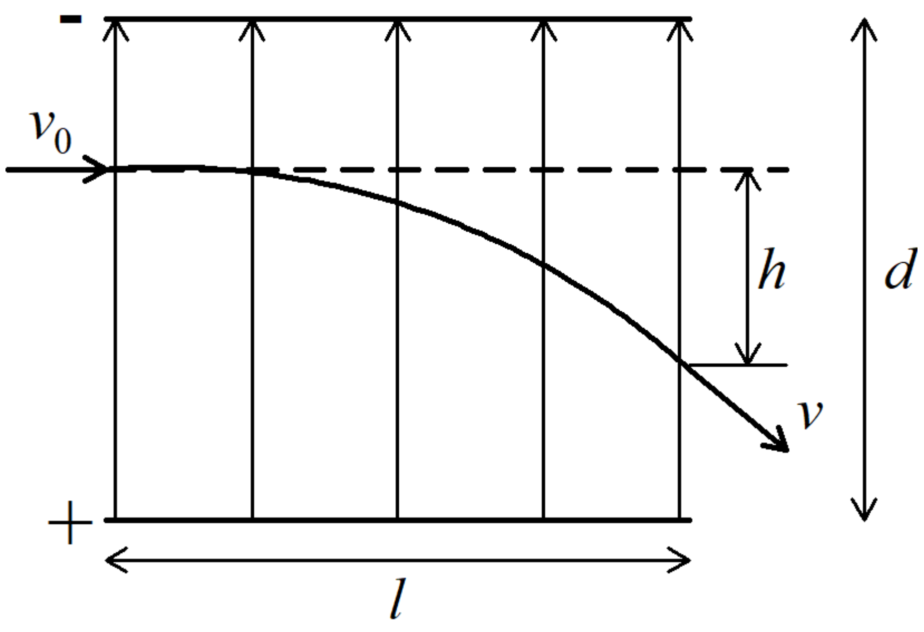
Die Abweichung von der „Eintrittshöhe“ des Elektrons ergibt sich natürlich als zurückgelegter Weg der gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung:

$$h = s_y = \frac{1}{2} a t^2$$

$\left(\begin{array}{c}\text{Auch hier wieder keine} \\ \text{Anfangswerte in } y\text{–Richtung} \\ \Rightarrow\ v_{y,0} = 0\,,\ s_{y,0} = 0\end{array}\right)$

480) Lösung c)

Skizze:



Die Abweichung von der „Eintrittshöhe" des Elektrons ergibt sich natürlich als zurückgelegter Weg der gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung:

$$h = s_y = \frac{1}{2}at^2$$

(Auch hier wieder keine Anfangswerte in y–Richtung $\Rightarrow\ v_{y,0} = 0\,,\ s_{y,0} = 0$)

Mit den bereits bekannten Ergebnissen für a und t ergibt sich:

$$\underline{\underline{h = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{m_\mathrm{e}d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} = 0{,}026\mathrm{m}\ \ (= 25{,}76\mathrm{mm})}}$$

480) Lösung d)

Kurze Antwort:

Das elektrostatische Feld ist ein *konservatives Kraftfeld* (wie auch das Gravitationsfeld).
Es gilt somit der Energieerhaltungssatz.
Das heißt, dass es zu keiner Änderung der Gesamtenergie kommen kann.

$$\Rightarrow \ \Delta E = 0$$

480) Lösung d)

Lange Antwort:

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{kin}} + \Delta E_{\mathrm{pot}} = \left(E_{\mathrm{kin,1}} - E_{\mathrm{kin,0}}\right) + \left(E_{\mathrm{pot,1}} - E_{\mathrm{pot,0}}\right)$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 - \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v_0^2\right) + (0 - qEh)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} (v^2 - v_0^2) - qEh$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} \left(v_0^2 + \frac{e^2 U^2 l^2}{m_{\mathrm{e}}^2 d^2 v_0^2} - v_0^2\right) - e \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{eUl^2}{2 m_{\mathrm{e}} d v_0^2}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} \left(\frac{e^2 U^2 l^2}{m_{\mathrm{e}}^2 d^2 v_0^2}\right) - \frac{e^2 U^2 l^2}{2 m_{\mathrm{e}} d^2 v_0^2}$$

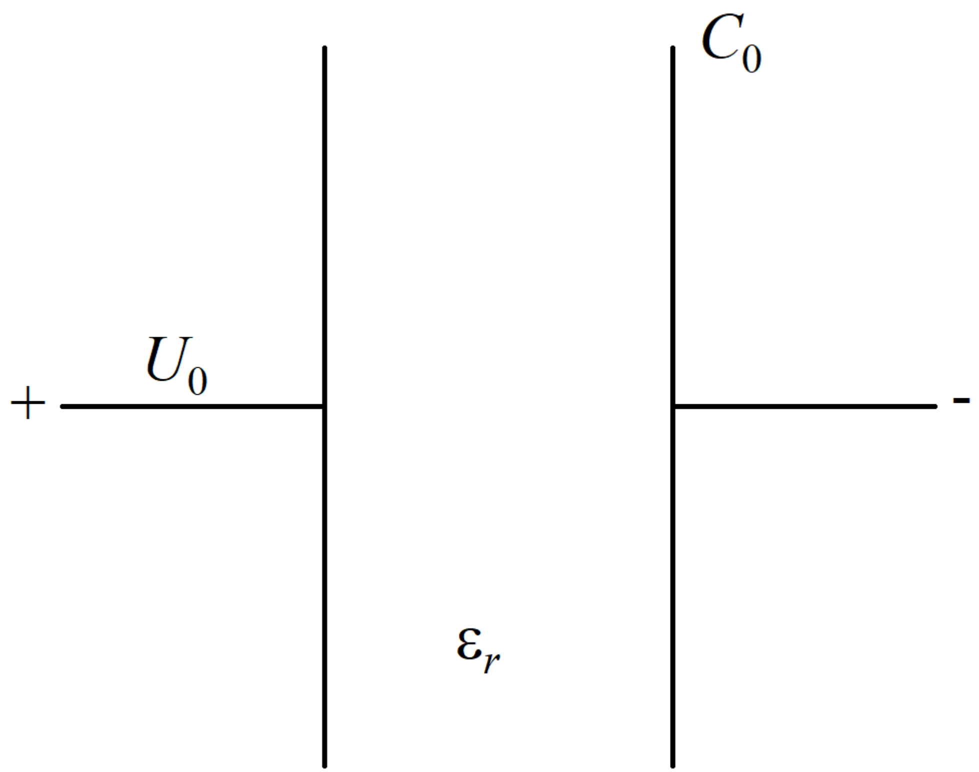
$$\Delta E = \frac{e^2 U^2 l^2}{2 m_{\mathrm{e}} d^2 v_0^2} - \frac{e^2 U^2 l^2}{2 m_{\mathrm{e}} d^2 v_0^2} \underline{\underline{= 0}}$$

Fertig ☺

(nächste Aufgabe)

508) Aufgabe

Skizze:



Kondensator:

$$C_0 = 80\text{pF}$$
$$U_0 = 150\text{V}$$
$$\varepsilon_r = 2{,}75$$

Gesucht sind die Werte für Kapazität C, Ladung Q, Spannung U und Energiegehalt E des Kondensators, für denn Fall, dass:

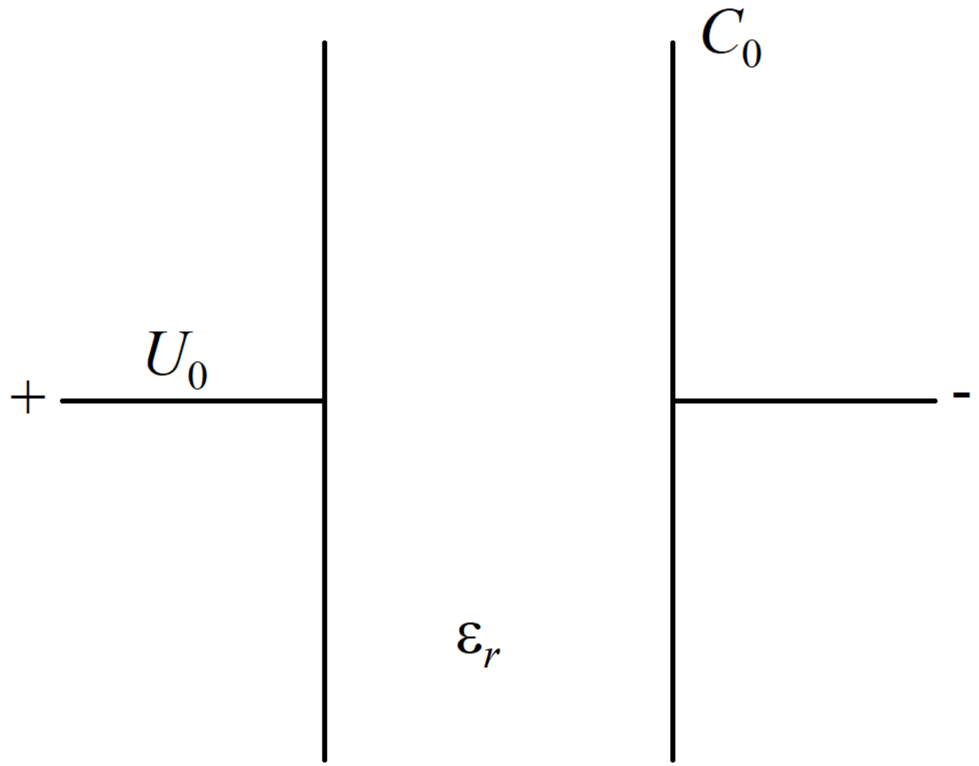
a) der Kondensator aufgeladen wird

b) der Kondensator mit Öl (ε_r) befüllt wird (ohne angeschlossene Spanungsquelle)

c) der Plattenabstand d des ungefüllten Kondensators verdoppelt wird

508) Grundlagen

Skizze:



Zusammenhang zwischen Kapazität C, Ladung Q und Spannung U eines Plattenkondensator:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d}$$

A – Flächeninhalt der Platten
d – Plattenabstand

Energieinhalt E eines Plattenkondensators:

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

508) Lösung a)

Kapazität: $C = C_0 = 80\mathrm{pF}$

Ladung: $Q = CU = C_0 U_0 = 12\mathrm{nC}$

Spannung: $U = U_0 = 150\mathrm{V}$

Energieinhalt: $E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = 0{,}9\mathrm{\mu J}$

508) Lösung b)

Kapazität: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0 = 220\mathrm{pF}$ $\left(C_0 = \varepsilon_0 \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{r,Luft}}}_{\approx 1} \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \right)$

Ladung: $Q = Q_0 = 12\mathrm{nC}$

Spannung: $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{\varepsilon_r C_0} = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = 54{,}54\mathrm{V}$

Energieinhalt: $E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 \frac{U_0^2}{\varepsilon_r^2} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_0 = 0{,}327\mathrm{\mu J}$

508) Lösung c)

Kapazität: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,\text{Luft}} \dfrac{A}{d_{\text{neu}}} = \varepsilon_0 \dfrac{A}{2d} = \dfrac{C_0}{2} = 40\text{pF}$ $\quad (d_{\text{neu}} = 2d)$

Ladung: $Q = CU = \dfrac{1}{2} C_0 U_0 = 6\text{nC}$

Spannung: $U = U_0 = 150\text{V}$

Energieinhalt: $E = \dfrac{1}{2} C U^2 = \dfrac{1}{4} C_0 U_0^2 = 0{,}45\mu\text{J}$

Fertig ☺