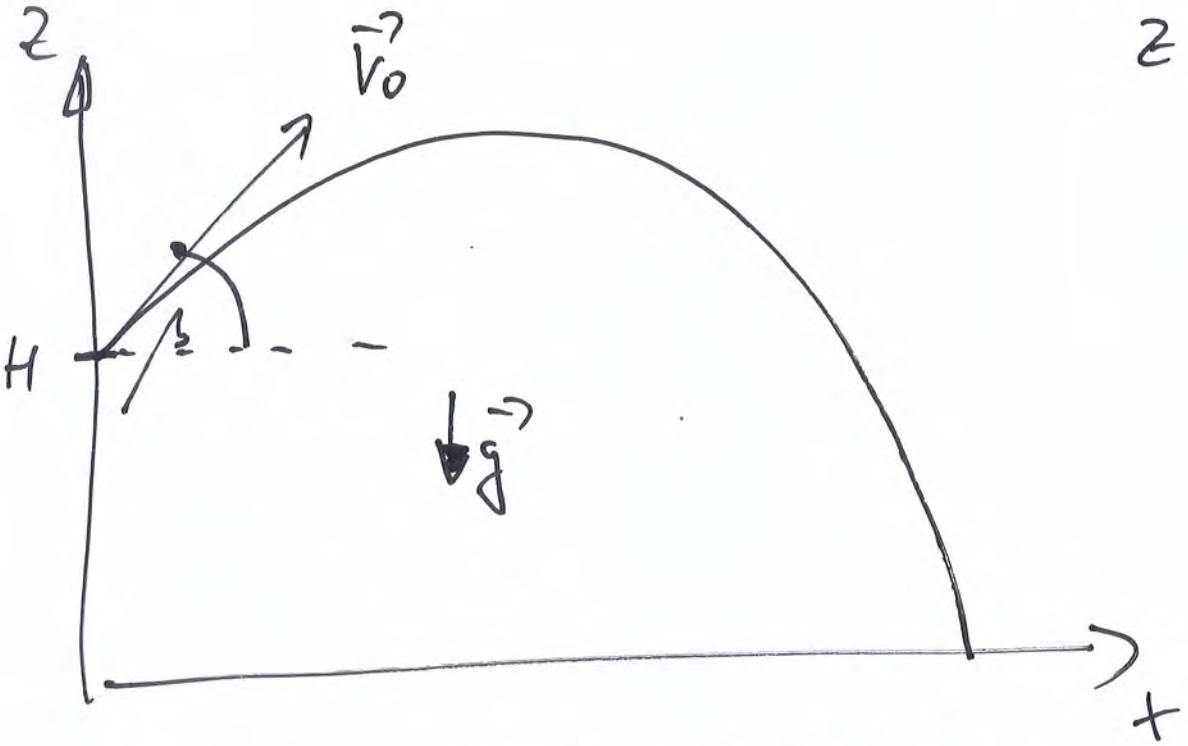
2.4. Zusammengesetzte Bewegung

- Bewegung in mindestens zwei Dimensionen
- Beispiel: der schiefe Wurf ⇒ Wurfparabel?

Bahnkurve

$z = z(t)$



$\vec{v}_0$ – Anfangsgeschwindigkeit

β – Abwurfwinkel

$\vec{g}$ – ~~Fally~~ Fallbeschleunigung

- Prinzip der Superposition

$$z = z(t)$$

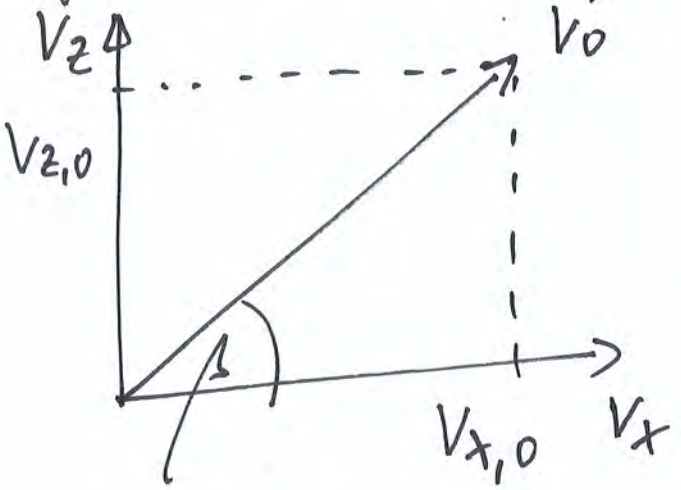
$$x = x(t)$$

- Anfangsbedingungen:

$$a_z = -g = \text{konst.}$$

$$a_x = 0$$

- Geschwindigkeiten für $t = 0$



$$\vec{v}_0 = v_{x,0} \cdot \vec{e}_x + v_{z,0} \cdot \vec{e}_z$$

$$v_0 = |\vec{v}_0| = \sqrt{\vec{v}_0^{\,2}}$$

$$v_{z,0} = v_0 \cdot \sin\beta$$

$$v_{x,0} = v_0 \cdot \cos\beta$$

$$a_z = -g = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\int a_z \cdot dt = \int dv_z$$

$$\int -g \cdot dt = \int dv_z$$

$$v_z = -g \cdot t + v_{z,0}$$

$$\Downarrow$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\int dz = \int v_z \cdot dt$$

$$\int dz = \int (-g \cdot t + v_{z,0})\, dt$$

$$z = -\frac{g}{2} t^2 + v_{z,0} \cdot t + H$$

$$a_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$v_x = konst = v_{x,0}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = v_{x,0} \cdot t$$

$$\Downarrow$$

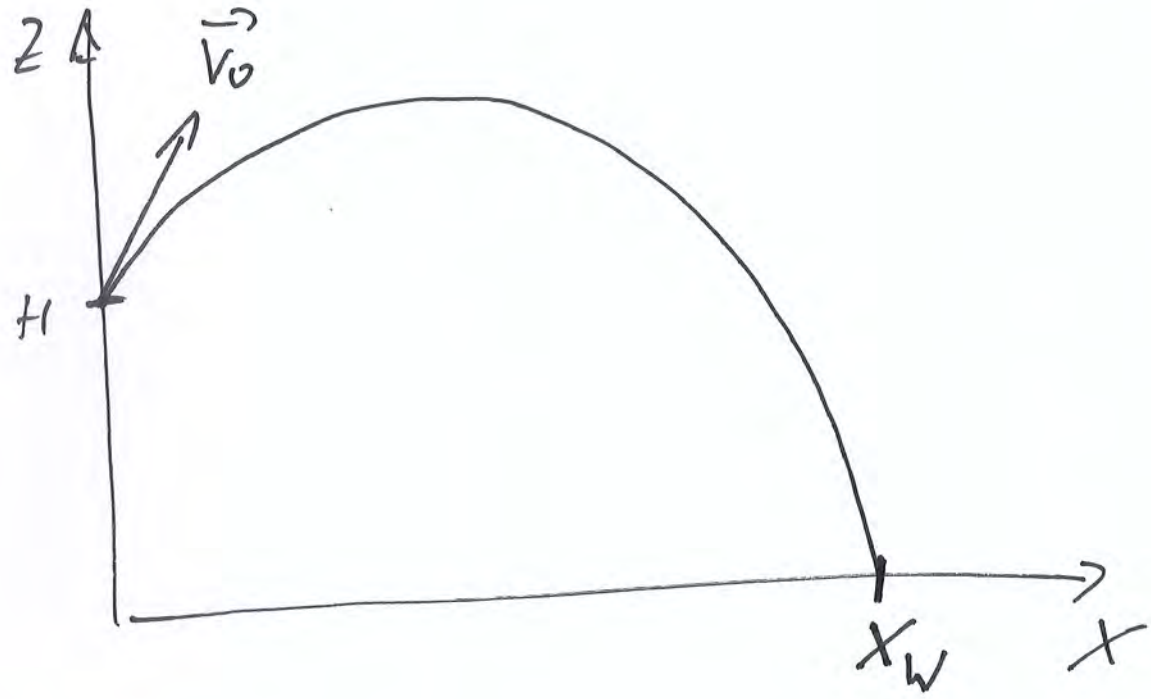
$$t = \frac{x}{v_{x,0}}$$

Bahnkurve: $z = z(x)$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_{x,0}^2} + \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} \cdot x + H}$$

$$\frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} = \tan\beta$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{(v_0 \cdot \cos\beta)^2} + x \cdot \tan\beta + H}$$



- x_W - Wurfweite

$$z(x_W) = 0$$

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{x_W^2}{(v_0 \cdot \cos\beta)^2} + x_W \cdot \tan\beta + H$$

- x_W für den Spezialfall $H = 0$

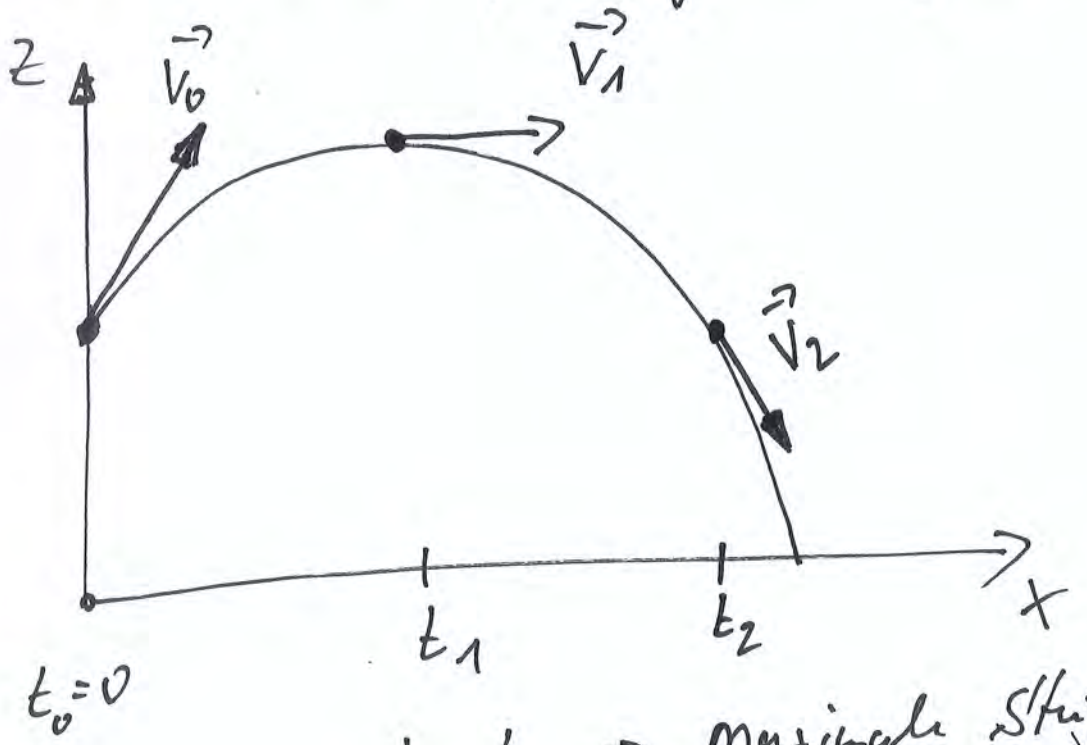
$$x_W = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\beta)$$

$\Rightarrow$ Maximum der Wurfweite:

$$\frac{dx_W}{d\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\beta = 90^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

- Momentane Richtung der Geschwindigkeit



$t = t_1 \Rightarrow$ maximale Sprunghöhe wird erreicht

$$\Rightarrow v_z(t=t_1) = 0$$

$$\vec{v}(t=t_1) = \vec{v}_1 = v_{x,0} \cdot \vec{e}_x$$

- Die Richtung der momentanen Geschwindigkeit wird jeweils durch die Richtung der Tangente an die Bahnkurve $z(t)$ charakterisiert.

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \Rightarrow \text{Anstieg der Tangente}$$

- momentane Geschwindigkeit

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$$

Einheitsvektor parallel zur Richtung der Tangente

$$|\vec{e}_t| = 1$$

- <u>Beschleunigung</u>

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{e}_t)}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

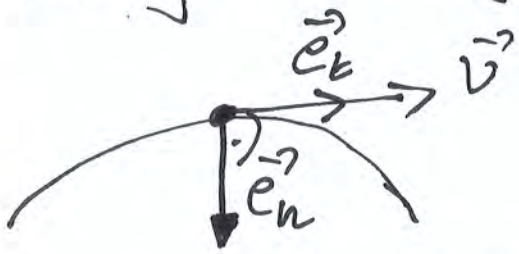
$\frac{d\vec{e}_t}{dt}$ → Änderung der Richtung von $\vec{v}$

$\frac{dv}{dt}$ ⇓ Änderung des Betrages der Geschwindigkeit

⇓ Bahnbeschleunigung

$\Downarrow$

Änderung der Richtung von $\vec{v}$



$\vec{e}_n$ – Einheitsvektor $\perp$ $\vec{e}_t$

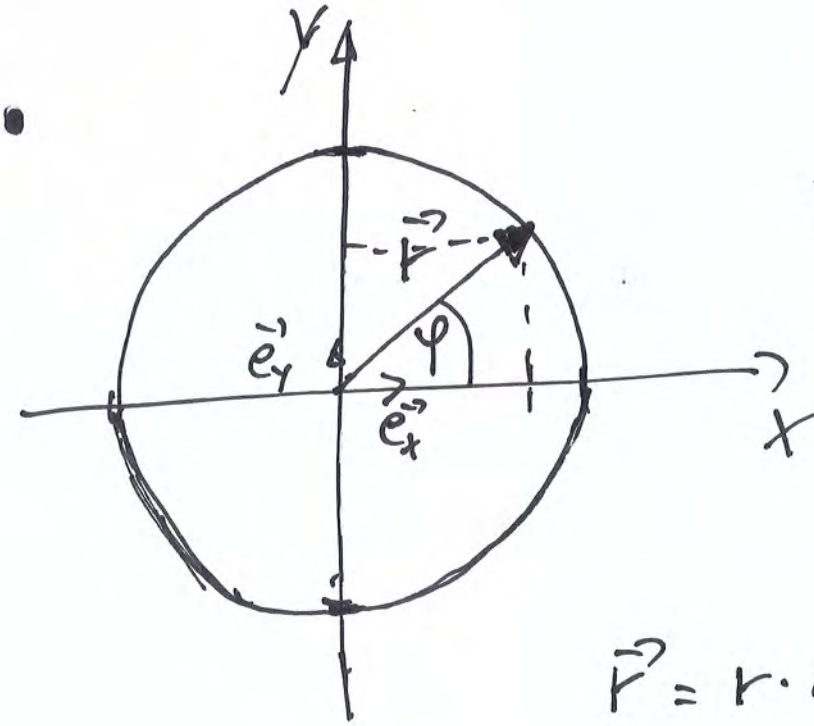
$\uparrow$ Normalenvektor

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{a_t}_{\substack{\uparrow \\ \frac{dv}{dt} \\ \uparrow \\ \text{Tangentialbeschleunigung}}} \cdot \vec{e}_t + \underbrace{a_n}_{\substack{\downarrow \\ ? \\ \text{Normal-Beschleunigung}}} \cdot \vec{e}_n}$$

gilt für jede krummlinige Bewegung

2.5. Kreisbewegung

- Spezialfall der krummlinigen Bewegung
- jede Kreisbewegung ist eine <u>beschleunigte</u> Bewegung, da sich mindestens die Richtung von $\vec{v}$ ständig ändert

- 

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

φ – Polarwinkel

Kreisbahn:

$$|\vec{r}| = \text{konst.} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = r \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin\varphi \, \vec{e}_y$$

- $\varphi = \varphi(t)$ $\Rightarrow$ Winkel ändert sich mit der Zeit

$\Downarrow$

Winkelgeschwindigkeit <u>(mittlere)</u>

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

<u>momentane</u> Winkelgeschwindigkeit: $\Delta t \to 0$

1. Ableitung

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

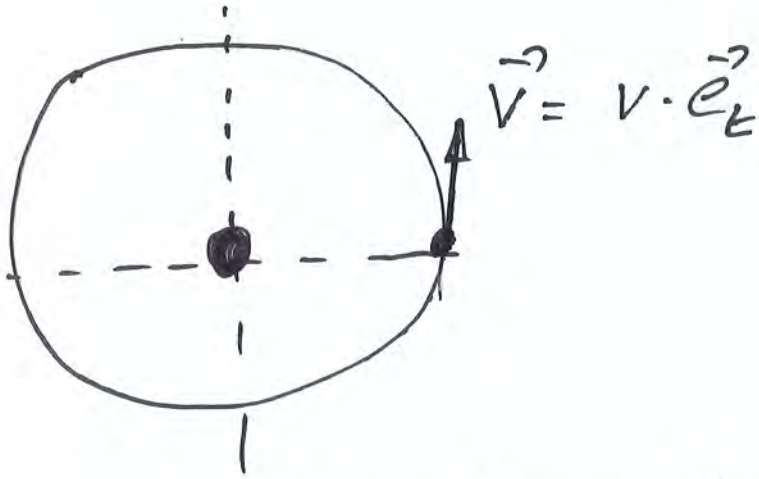
- Zur Änderung der Winkelgeschwindigkeit

$\Downarrow$

Winkelbeschleunigung

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$$

- Richtung der Bahngeschwindigkeit



- Beispiel: gleichförmige Kreisbewegung

  ⇒ in gleichen Zeiten (Δt) werden gleiche Winkel ($\Delta \varphi$) überstrichen

  ⇒ für eine volle Umdrehung

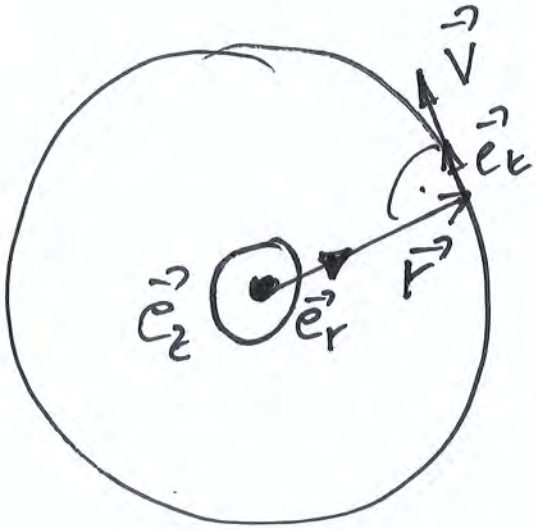
  $\Delta \varphi = 2\pi$ ($\hat{=} 360°$)

  wird eine Umlaufzeit $\Delta t = T$ benötigt (T – Periodendauer)

  ⇒ $$\boxed{\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}}$$

$\Downarrow$

Einführung von Zylinderkoordinaten



$\vec{e}_r$ – Einheitsvektor $\parallel$ zu $\vec{r}$

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

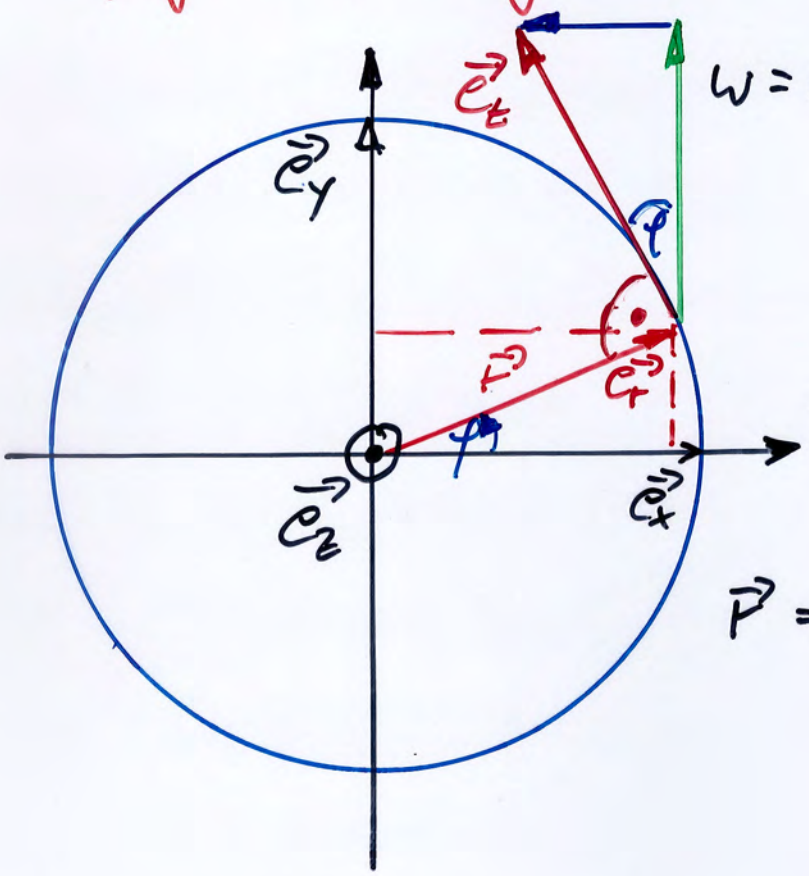
$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$$

$\vec{e}_z$ – axialer Vektor parallel zur Drehachse

$\vec{z} = z \cdot \vec{e}_z$ steht senkrecht auf der Blattebene

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z}$$

a.) gleichförmige Kreisbewegung



$$\omega = \text{konst.} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

T = Periodendauer

$$\Rightarrow \varphi = \omega \cdot t$$

$$\vec{r} = r\left(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \omega \left(\underline{-\sin(\omega t)\vec{e}_x} + \underline{\cos(\omega t)\vec{e}_y}\right)$$

$$\vec{v} = v \cdot \underline{\vec{e}_t}$$

Momentane Richtung von $\vec{v}$

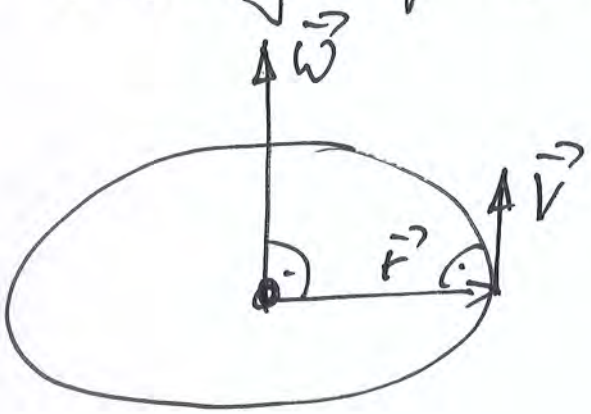
$\Rightarrow$ Tangente an Bahn

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \cdot \omega^2\left(-\cos(\omega t)\vec{e}_x - \sin(\omega t)\vec{e}_y\right)$$

$\vec{a}$ antiparallel zu $\vec{r}$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r} = \vec{a}_{rad} = \vec{a}_n$$

- Anordnung auf die drei Vektoren



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{v} \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_r &= \vec{e}_t \end{aligned}}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(90°)$$

$\vec{e}_z \perp \vec{e}_r$

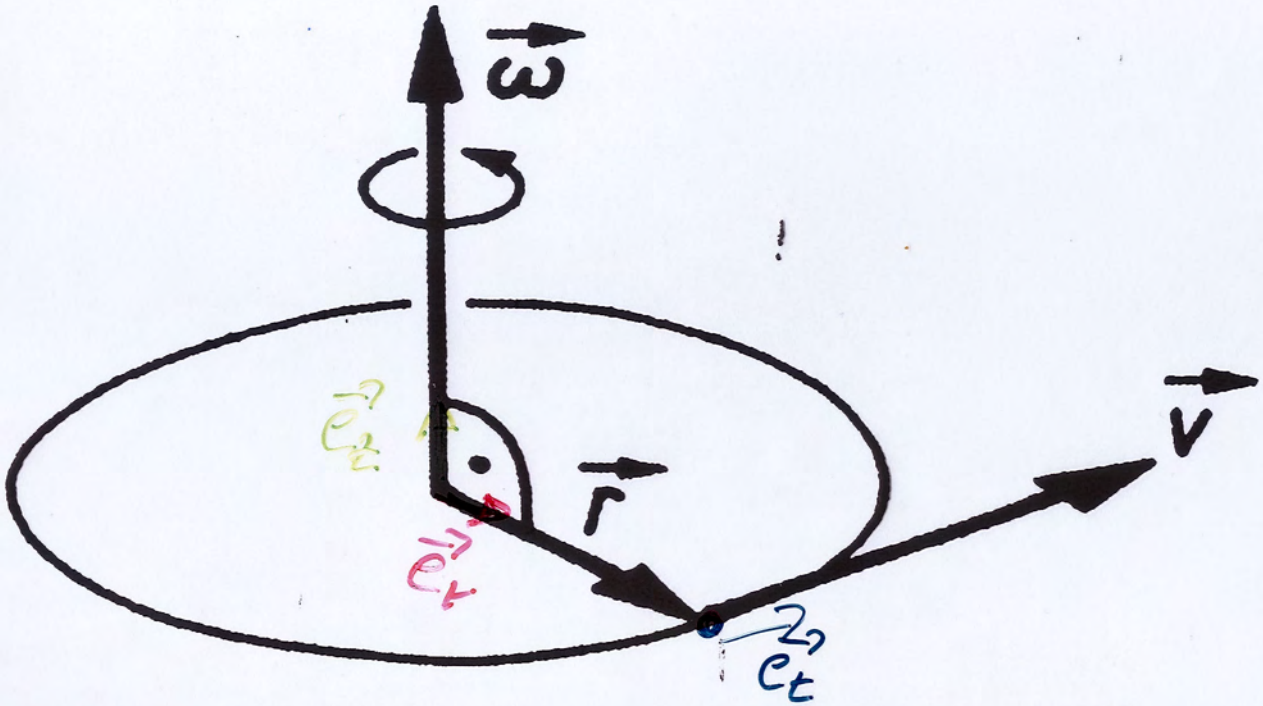
$$|\vec{v}| = v = \omega \cdot r$$

$\Downarrow$

für die gleichförmige Kreisbewegung

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Umfang des Kreises



$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$

$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

- beschleunigte Kreisbewegung allgemein

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$= \frac{d\omega}{dt} (\vec{e_z} \times \vec{e_r}) \cdot r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \vec{e_t} \cdot r}_{\text{Tangentialbeschleunigung } \vec{a_t}} \underbrace{- \omega^2 \cdot r \cdot \vec{e_r}}_{\text{Normalbeschleunigung}}$$

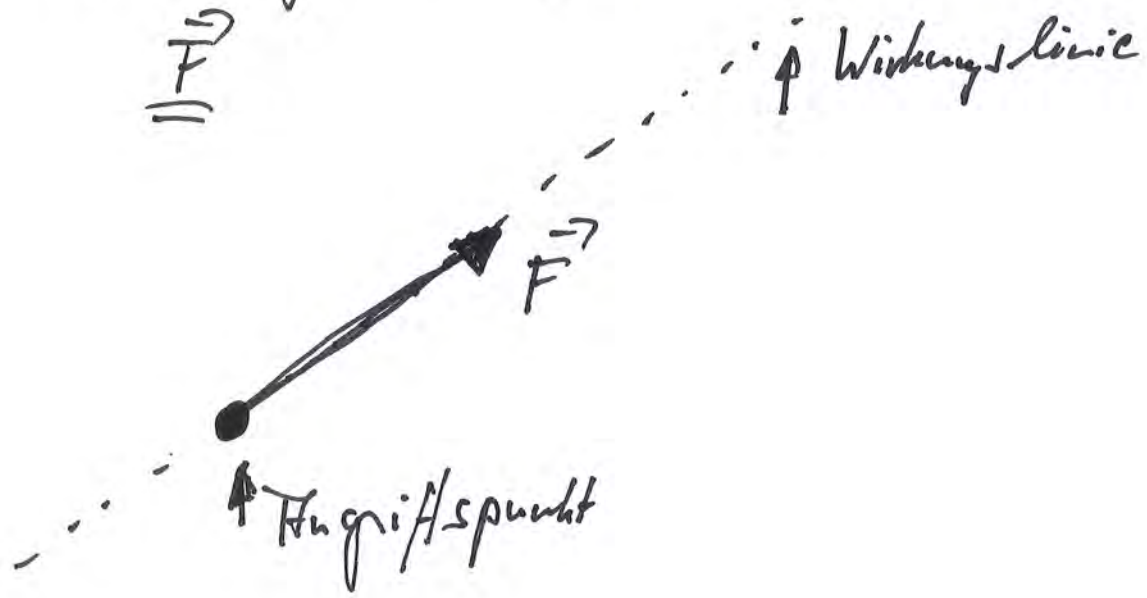
= Radialbeschleunigung

= Zentripedalbeschleunigung $\vec{a_r}$

3. Dynamik der Punktmasse

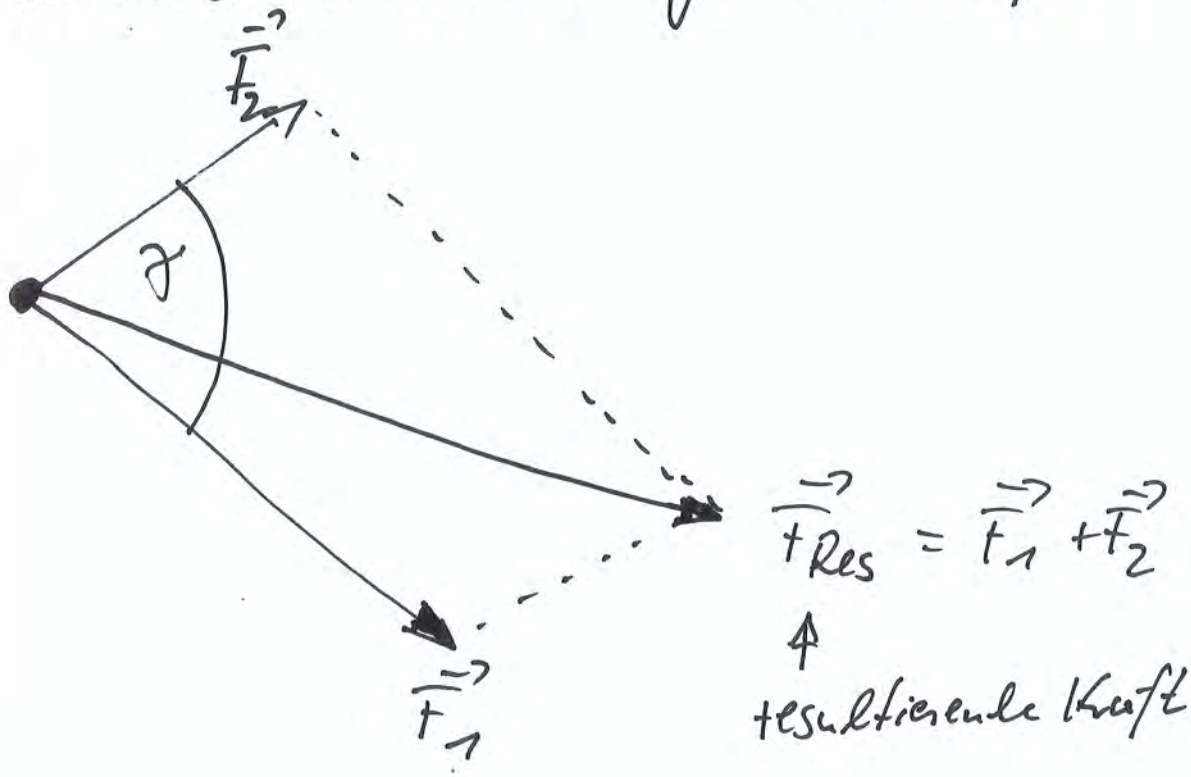
3.1. Kraftbegriff

- Kraft als Ursache für
  - Verformung von Körpern
  - Änderung des Bewegungszustandes von frei beweglichen Körpern
- Einheit der Kraft: $[F] = 1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$
- die Kraft als gerichtete Größe $\Rightarrow$ Vektor



- Superposition ⇒

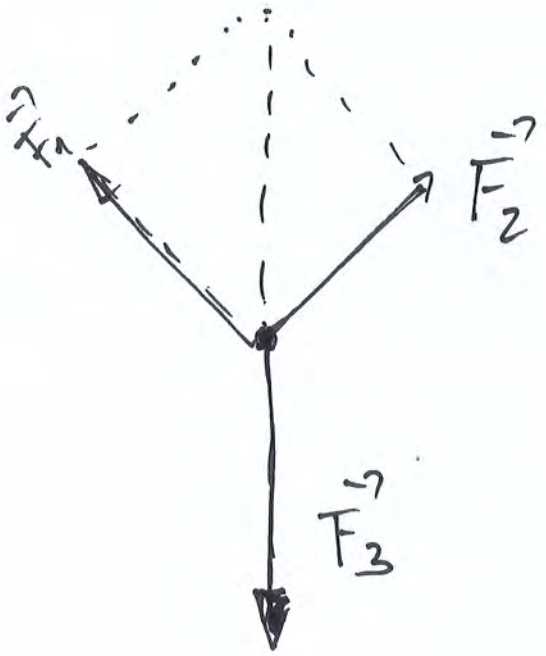
Zusammensetzen oder Zerlegen von Kräften



$$|\vec{F}_{Res}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma}$$

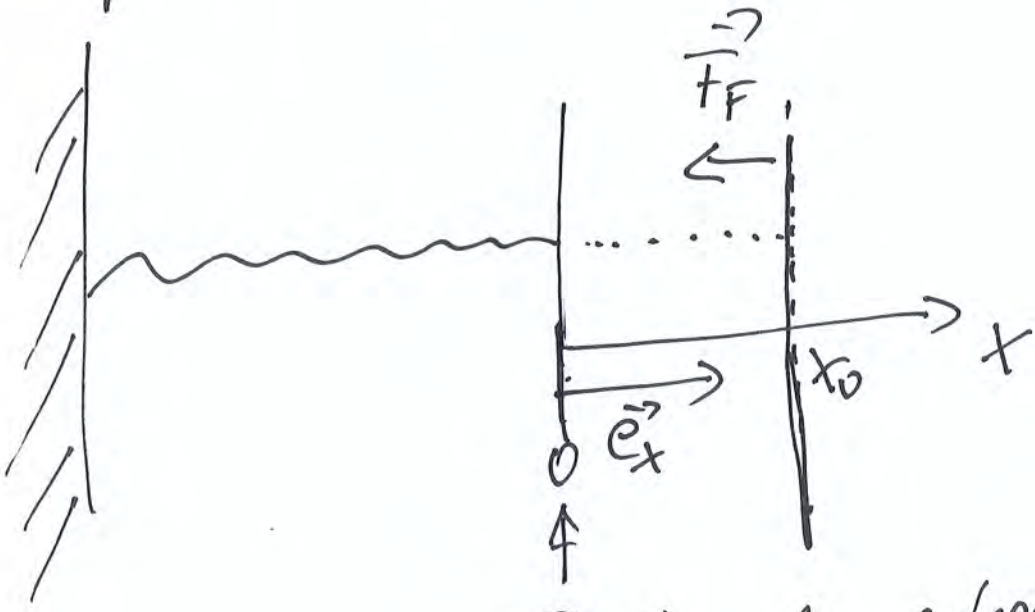
- Statisches Gleichgewicht

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{Res} = 0}$$



- Messen von Kräften

Bsp.: Federkraftmesser



Position der entspannten Feder

$\vec{F}_F$ - Federkraft im Bsp.: $\vec{F} = -k \cdot x_0 \vec{e}_x$

↳ Rückstreibend k - Federkonstante

x_0 - Auslenkung im Bsp.

⇒ Verallgemeinerung:

$$\vec{F}_F = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$$