

---

# geometria – scientiae atlantis

---

*Eckard Specht*  
*Robert Strich*

440+ mathematische Probleme mit Lösungen  
insbesondere zur Vorbereitung auf Olympiaden und Wettbewerbe

2., erweiterte Auflage

Band 1  
*Geometrie, Kombinatorik, Logik*

Mit 532 Abbildungen, 36 Beispielen und 9 Tabellen



Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Dr. rer. nat. *Eckard Specht*

Jahrgang 1958; Studium der Physik an der Technischen Hochschule Magdeburg, 1982 Diplom, 1985 Promotion, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Experimentelle Physik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.  
E-Mail: [eckard.specht@physik.uni-magdeburg.de](mailto:eckard.specht@physik.uni-magdeburg.de)

Dr. (USA) *Robert Strich*

Jahrgang 1978; Studium der Physik an der Georg-August-Universität Göttingen, 2002 Diplom, 2007 Promotion in Mathematik an der University of Florida, zur Zeit Studienreferendar am Lessing-Gymnasium Neu-Ulm.  
E-Mail: [robert.strich@gmx.de](mailto:robert.strich@gmx.de)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-940961-19-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder von Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung der Autoren in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Mit freundlicher Genehmigung (Schutzumschlag und Abschnitt Z.2 in deutscher Übersetzung):  
Pólya, George: How to Solve It. Copyright © 1985 by Princeton University Press

<http://www.math4u.de>

© 2009 E. Specht, R. Strich

Satz: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Vorlagen der Autoren

Titelbildmontage: N. Perner

Grafik: <http://sourceforge.net/projects/nicefig>

Druck: KOCH-DRUCK, Halberstadt

Printed in Germany

## Vorwort

Bücher sind wie Menschen, sie entwickeln sich, wenn man ihnen ein wenig Zeit zur Reife lässt. Vor über sieben Jahren versuchte die erste Auflage dieses Buches, eine Lücke im jüngeren deutschsprachigen Büchermarkt zu schließen, um interessierten Schülern Übungsaufgaben zum Training für Mathematikzirkel und -wettbewerbe in die Hand zu geben. Ursprünglich als Zusammenstellung von Aufgaben und Themen aus den Gebieten Geometrie und Ungleichungen entstanden, die wir anlässlich der alljährlich im April stattfindenden Vorbereitungskurse der nominierten Teilnehmer Sachsen-Anhalts an der Deutschen Mathematik-Olympiade in den oberen Klassenstufen behandelten, kam im Laufe der Zeit viel neues Material hinzu. Dieses wuchs derart rasch an, dass es vernünftiger erschien, nicht alles in einen Band zu pressen. So umfasst der nunmehr vorliegende erste Band der zweiten Auflage die Gebiete ebene und räumliche Geometrie, Kombinatorik sowie Logik und Mengenlehre.

Dass hier insbesondere die Elementargeometrie sehr stark vertreten ist, liegt zum einen an ihrem eigenartigen Reiz. Obwohl sie zu den ältesten wissenschaftlichen Disziplinen überhaupt zählt, scheint es so, dass eine Vielzahl ihrer bemerkenswerten Entdeckungen seit EUKLID (365–300 v. Chr.) im Laufe der Jahrhunderte verloren gegangen sind. Selbst ein Aufblühen im 19. Jahrhundert, in dem zahlreiche und bis dahin unbekannte oder inzwischen wieder vergessene Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Kreisen im Dreieck gefunden wurden, vermochte die Elementargeometrie nicht als attraktive Wissenschaft in die Neuzeit hinüberzuretten. So spielen diese, mit Namen großer Geometer belegte Entdeckungen im Allgemeinwissen heutiger Generationen nahezu keine Rolle mehr. *Die Geometrie – ein Atlantis der Wissenschaften*. Zum anderen verschwindet sie zusehends aus den Lehrplänen der Schulen und den Curricula der Universitäten und Hochschulen, so dass immer weniger Menschen den Zugang zu ihr finden.

Mitunter sieht man Mathematiker etwas geringschätzig auf die Elementargeometrie herabblicken. Sie ist längst nicht so abstrakt wie andere Gebiete, die ihrerseits zudem häufig einen eigenen Kalkül entwickelt haben und dessen Beherrschung die Mathematiker zu Spezialisten macht. Doch gerade das Fehlen einer systematischen Lösungsmethode macht sie zu einer hochgradig intuitiven Angelegenheit und für jeden verständlich – auch ohne absolviertes Studium. Sie ist also hervorragend geeignet, logisches Denkvermögen, Ausdauer und Konzentration zu trainieren, ganz gleich für welchen Wissenschaftszweig oder welche Altersgruppe; sogar rüstige Rentner entdecken sie oft für sich neu. Allerdings ist sie streng axiomatisch aufgebaut, so dass ihr Hauptinhalt aus *Sätzen* und den notwendig dazugehörigen *Beweisen* besteht. Und dass das auf manchen abschreckend wirkt, ist wiederum verständlich.

Größter Wert wurde auf ansprechende und vor allem genaue Bilder gelegt, die wesentlich zum Erfassen des Inhalts der Aufgaben und zum Verständnis der Lösungen beitragen. Für die Anfertigung der Bilder wurde eigens eine umfassende Software geschrieben, mit der zwar für jedes Bild ein C++-Programm erstellt werden muss, für dessen Ergebnis man jedoch mit einem exakten und frei skalierbaren PostScript-Bild belohnt wird. Interessanterweise befruchten sich der Buchinhalt und die Entstehung der Software gegenseitig. Das Programmpaket steht unter <http://sourceforge.net/projects/nicefig> frei zur allgemeinen Verfügung.

In allen Kapiteln wird versucht, die wichtigsten und geläufigsten Lösungsansätze und Lösungsmethoden vorzustellen und mit weiteren verwandten Aufgaben, darunter vor allem Olympiade- und Wettbewerbsaufgaben, systematisch zu trainieren. Nicht immer steht dabei die strenge Beweisführung im Vordergrund, wie sie „live“ in Wettbewerben unerlässlich ist. So werden z. B. nicht immer alle denkbaren Fälle oder Lagebeziehungen einzeln und ausführlich diskutiert. Der geneigte Leser möge diese Lücken selbst erkennen und bei Bedarf und Interesse ausfüllen.

Einige interessante Themen mussten unberücksichtigt bleiben wie z. B. Konstruktionen in begrenzter Ebene, Projektive Geometrie, Prädikatenlogik oder Dreieckskoordinaten. Diese werden in einem späteren Band behandelt. Das vorliegende Buch bemüht sich daher, einerseits eine (zwar immer unvollständig bleibende) Faktensammlung zu sein und andererseits einige Methoden, Tipps und Tricks vorzustellen, die benötigt werden, um mathematische Puzzles erfolgreich zu lösen.

*Für inhaltliche Anregungen und Verbesserungshinweise sind wir jederzeit dankbar.*

Wir wünschen viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben!

Oschersleben, Neu-Ulm, im Januar 2009

E. SPECHT, R. STRICH

# Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>KONSTRUKTIONEN</b>	1
A.1	Euklidische Grundkonstruktionen	2
A.2	Geometrische Örter	3
A.3	Kreiskonstruktionen	5
A.4	Mohr-Mascheronische Konstruktionen	7
A.5	Steinersche Konstruktionen	9
A.6	Konstruktions-Potpourri	10
<b>B</b>	<b>DREIECKSKONSTRUKTIONEN</b>	11
B.1	Die Grundaufgaben	11
B.2	Auffinden von Hilfsdreiecken	12
B.3	Berechnung fehlender Stücke	14
B.4	Rekonstruktion aus gegebenen Punkten	14
<b>C</b>	<b>KOMBINATORIK</b>	15
C.1	Vom Zählen	15
C.1.1	Permutationen, Variationen, Kombinationen	15
C.1.2	Systematisch zählen	17
C.1.3	Zweimal oder anders zählen	18
C.1.4	Zählen durch Rekursion	19
C.2	Das Dirichletsche Schubfachprinzip	20
C.2.1	Divisionsreste	20
C.2.2	Geometrische Schubfächer	22
C.2.3	... und noch mehr Schubfächer	22
C.3	Das Extremalprinzip	23
C.4	Invarianten	24
C.5	Färbungen	26
C.6	Gitterprobleme	27
C.6.1	Wege in Gittern	27
C.6.2	Flächeninhalte	28
<b>D</b>	<b>DREIECK</b>	29
D.1	Klassische Transversalen	29
D.2	Ceva & Menelaus	32
D.3	Extremalaufgaben	36
D.4	Nützliche Formeln	37
D.5	Lotfußpunktdreiecke	39
D.6	Mehr über Dreiecke	40
<b>K</b>	<b>KREIS</b>	41
K.1	Sätze über Winkel und Längen	42
K.2	Inversion am Kreis	45
K.2.1	Eigenschaften der Inversion	45
K.2.2	Inversionstricks	47
K.2.3	Anwendungen zur Inversion	48
K.3	Miquel & Co.	49
K.4	Mehr über Kreise	50

<b>L</b>	<b>LOGIK UND MENGENLEHRE</b>	51
L.1	Aussagenlogik	51
L.2	Mengenlehre	57
L.3	Vollständige Induktion	61
<b>M</b>	<b>METHODEN IN DER GEOMETRIE</b>	63
M.1	„Winkel jagen“	63
M.2	Verwandlung von Figuren	64
M.3	Vektorrechnung	65
M.4	Das Flächenprinzip	69
M.5	Komplexe Zahlen & Geometrie	72
<b>R</b>	<b>RÄUMLICHE GEOMETRIE</b>	75
R.1	Körperliche Ecke	77
R.2	Tetraeder	78
R.2.1	Gleichschenkliges Tetraeder	80
R.3	Kugel	82
<b>V</b>	<b>VIERECK</b>	83
V.1	Allgemeines Viereck	84
V.2	Trapez, Parallelogramm, Rechteck etc.	85
V.3	Sehnenviereck	86
V.4	Tangentenviereck	87
V.5	Sehntangentenviereck	88
<b>X</b>	<b>HINWEISE</b>	89
<b>Y</b>	<b>LITERATUR</b>	93
Y.1	Bücher	93
Y.2	Zeitschriften-Artikel	100
Y.3	Zeitschriften	100
Y.4	Webseiten	100
<b>Z</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	102
Z.1	Pólyas Liste	103
Z.2	„Vergißmeinnicht“	104
<b>A</b>	<b>LÖSUNGEN: KONSTRUKTIONEN</b>	105
<b>B</b>	<b>LÖSUNGEN: DREIECKSKONSTRUKTIONEN</b>	131
<b>C</b>	<b>LÖSUNGEN: KOMBINATORIK</b>	142
<b>D</b>	<b>LÖSUNGEN: DREIECK</b>	149
<b>K</b>	<b>LÖSUNGEN: KREIS</b>	175
<b>L</b>	<b>LÖSUNGEN: LOGIK UND MENGENLEHRE</b>	195
<b>M</b>	<b>LÖSUNGEN: METHODEN IN DER GEOMETRIE</b>	201
<b>R</b>	<b>LÖSUNGEN: RÄUMLICHE GEOMETRIE</b>	218
<b>V</b>	<b>LÖSUNGEN: VIERECK</b>	229
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	243