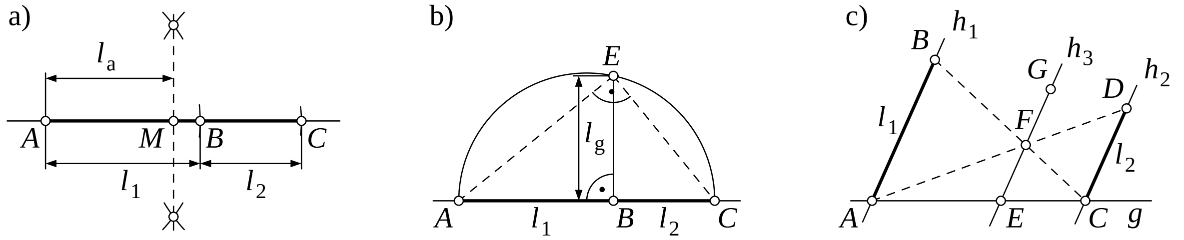
A.14 **Mittelwerte. Mittlere Proportionale.** Man konstruiere a) das arithmetische, b) das geometrische und c) das harmonische Mittel zweier Strecken l_1 und l_2.

A.14 Das *arithmetische Mittel* beträgt $l_\mathrm{a} \equiv \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, das *geometrische Mittel* (auch „dritte“ oder *mittlere Proportionale* genannt) $l_\mathrm{g} \equiv \sqrt{l_1 l_2}$; für das *harmonische Mittel* gilt bekanntlich:

$$\frac{1}{l_\mathrm{h}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \qquad \text{oder} \qquad l_\mathrm{h} = \frac{2\, l_1 l_2}{l_1 + l_2}.$$

Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten zur Konstruktion:
a) Auf einer Geraden werden die beiden Strecken mit den Längen $l_1 \equiv AB$ und $l_2 \equiv BC$ hintereinander abgetragen und der Mittelpunkt von AC konstruiert (Bild a). Die Länge der Strecke AM ist dann gleich l_a.
b) Für das geometrische Mittel gilt nach obiger Gleichung auch: $l_\mathrm{g}^2 = l_1 l_2$. Wenn es also gelingt, ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $l_1 l_2$ in ein flächengleiches Quadrat mit dem Inhalt l_g^2 umzuwandeln, ist die Aufgabe gelöst. Dies läßt sich mit Hilfe des Höhensatzes $h^2 = pq$ im



rechtwinkligen Dreieck erreichen (Bild b): Über dem Durchmesser der Länge $l_1 + l_2$ wird der THALES-Kreis gezeichnet. Die Länge der Höhe BE im rechtwinkligen Dreieck AEC ist dann nach dem Höhensatz gleich dem geometrischen Mittel l_g.
c) Wir ziehen eine Gerade g und lassen sie von zwei beliebigen, aber untereinander parallelen Geraden h_1 und h_2 in A bzw. C schneiden. Auf letzteren tragen wir nun die Strecken $l_1 \equiv AB$ und $l_2 \equiv CD$ in die gleiche Richtung ab, zeichnen AD und BC, deren Schnittpunkt F sei, und ziehen die Parallele $h_3 \parallel h_1, h_2$ durch F. Wenn E der Schnittpunkt von h_3 und g ist, dann wird $EF = \frac{1}{2} l_\mathrm{h}$. Um das einzusehen, genügt es, den zweiten Strahlensatz zu bemühen:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{l_2}, \qquad \frac{EC}{EF} = \frac{AC}{l_1}.$$

Aus der Addition beider Gleichungen folgt mit $AE + EC = AC$: $1/l_1 + 1/l_2 = 1/EF = 2/l_\mathrm{h}$. Verdoppeln wir also noch die Strecke EF, erhalten wir mit EG das gesuchte harmonische Mittel.
Bemerkung: Zwischen den drei Mitteln bestehen bekanntlich die Ungleichungen $l_\mathrm{h} \leq l_\mathrm{g} \leq l_\mathrm{a}$ (vgl. Aufgabe **U.15** und **U.16**).