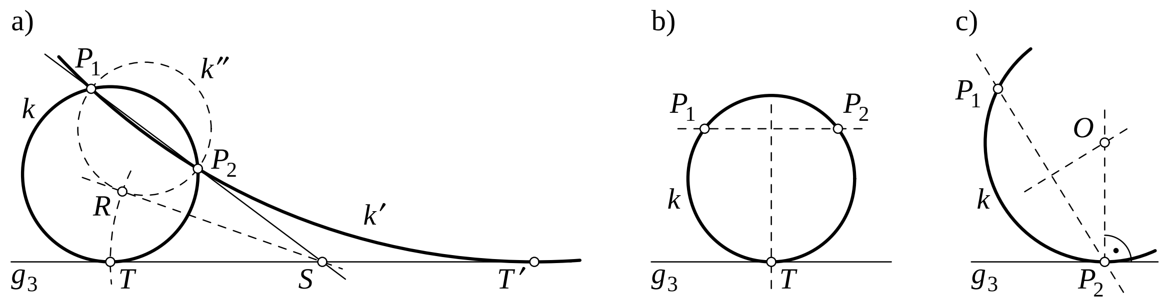
$\boxed{\text{A.32}}$ **Berührungsproblem des Apollonius (PPG).** Gesucht sind Kreise, die durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen und die Gerade g_3 berühren.

A.32 Angenommen, k sei einer der gesuchten Kreise. Da k die Gerade g_3 in einem Punkt berühren soll, liegen alle Punkte auf der Peripherie von k in derselben von g_3 geteilten Halbebene. Demzufolge müssen P_1 und P_2 in *einer* Halbebene liegen. Weiterhin sei angenommen, daß k die



Gerade g_3 in T berührt und die Gerade $h(P_1, P_2)$ g_3 in S schneidet (Bild a). Nach dem Sekanten-Tangentensatz (s. Aufgabe K.13) gilt dann $SP_1 \cdot SP_2 = ST^2$, d. h., der Tangentenabschnitt ST ist die mittlere Proportionale aus SP_1 und SP_2 und damit konstruierbar. Dazu nehmen wir z. B. einen beliebigen Kreis k'', der durch P_1 und P_2 geht (etwa den THALES-Kreis über P_1P_2 wie im Bild) und konstruieren von S aus die Tangente an diesen. Wir erhalten die Länge $SR = ST$ und damit Punkt T auf g_3. Somit ist das Berührungsproblem PPG auf das Problem PPP zurückgeführt (s. Aufgabe A.31). Tragen wir ST in die andere Richtung auf g_3 ab, finden wir einen weiteren Kreis k'; es existieren also zwei Lösungen. Ist andererseits $h \parallel g$, läßt sich die angegebene Konstruktion nicht durchführen. Dann liegt T aber auf der Mittelsenkrechten von P_1P_2, und k ist somit eindeutig bestimmt (Bild b).
Schließlich gibt es noch den Fall, daß einer der gegebenen Punkte (Bild c) oder beide auf g_3 liegen. Ist etwa $P_2 = T$, so liegt der Mittelpunkt O des gesuchten Kreises auf der Senkrechten in P_2 zu g_3 und auf der Mittelsenkrechten von P_1P_2. Hier gibt es genau eine Lösung. Liegen beide Punkte P_1, P_2 auf g_3, existiert selbstverständlich keine Lösung.
Bemerkung: Geometrische Orte führen im Fall $h \nparallel g$ nicht zu einer EUKLIDischen Konstruktion, da der g. O. aller derjenigen Punkte, die von einem gegebenen Punkt und einer Gerade denselben Abstand haben, eine *Parabel* ist und diese nicht mit Zirkel und Lineal gezogen werden kann.