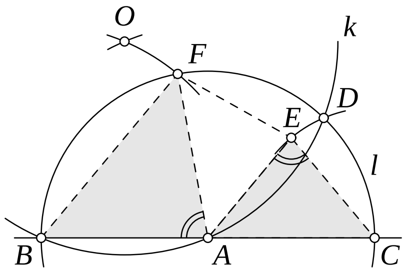
A.51 Man konstruiere den Mittelpunkt eines Kreises.

A.51 (Bild) Wir zeigen, daß O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises k ist, von dem lediglich ein beliebig großer (Teil-)Bogen vorzuliegen braucht. Folgende Schritte führen zum Ziel:

1. Wähle einen beliebigen Punkt A auf dem gegebenen Bogen. Ziehe einen Kreis $l \equiv A_s$ (Mittelpunkt A, beliebiger Radius s), der k in B und D schneidet.
2. Konstruiere einen Punkt C derart, daß BC ein Durchmesser von l ist (s. Aufgabe A.42).
3. Ziehe mit dem Radius CD zwei Kreise A_{CD} und C_{CD}; deren einer Schnittpunkt sei E.
4. Ziehe den Kreis E_{CD}. Er möge l in F schneiden.
5. BF ist der gesuchte Radius, mit dessen Hilfe sich O als Schnittpunkt der beiden Kreise A_{BF} und B_{BF} bestimmen läßt.

Beweis: Es ist $\triangle ACE \cong \triangle AFE$ (Kongruenzsatz SSS). Weiterhin gilt:



$$\begin{aligned} \measuredangle BAE &= \measuredangle ACE + \measuredangle AEC \quad \text{(Außenwinkel)} \\ &= \measuredangle EAF + \measuredangle BAF \quad \text{(Winkelsumme)}, \end{aligned}$$

also $\measuredangle BAF = \measuredangle AEC$ und damit $\triangle FBA \sim \triangle ACE$.
Aus dieser Ähnlichkeit folgen die Gleichungen

$$\frac{BO}{AB} = \frac{BF}{AB} = \frac{AC}{CE} = \frac{AC}{CD},$$

deren äußere auf $\triangle BAO \sim \triangle CDA$ schließen lassen (beide Dreiecke sind gleichschenklig). Somit gilt $\measuredangle BAO = \measuredangle ACD = \frac{1}{2}\measuredangle BAD = \measuredangle DAO$. Aus $\measuredangle BAO = \measuredangle DAO$ folgt $\triangle BAO \cong \triangle DAO$, mithin $BO = AO = DO$. $\square$