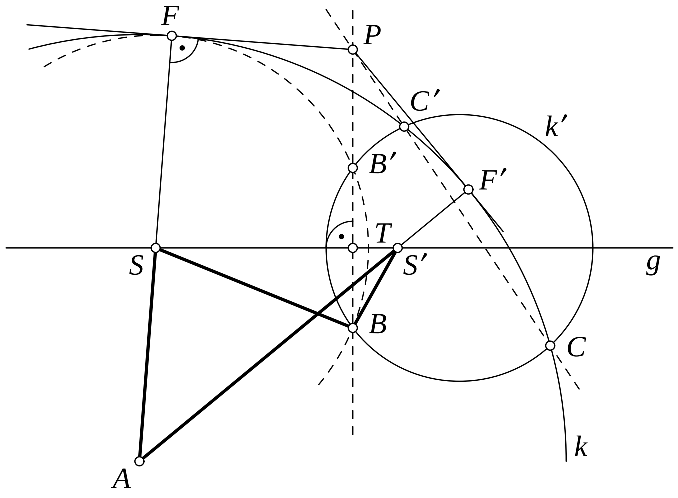
A.72 Gegeben seien zwei feste Punkte A und B sowie eine Gerade g; auf ihr ist S so zu bestimmen, daß $AS + SB$ gleich einer gegebenen Strecke s wird.

A.72 (Bild) *Konstruktion:* Wir ziehen einen Kreisbogen $k \equiv A_s$ und spiegeln B an g, wodurch wir B' erhalten. Ein beliebiger, durch B und B' gehender Kreis k' schneide k in den Punkten C und C'. Der Schnittpunkt der Geraden BB' und CC' sei P. Legen wir von P aus die Tangenten an k, so erhalten wir die Punkte F bzw. F'. Die Geraden AF bzw. AF' schneiden g in den gesuchten Punkten S bzw. S'.



Beweis: Es ist zu zeigen, daß tatsächlich $AS+SB = s$ gilt. $PF = PF'$ ist Tangentenabschnitt an k, dessen Quadrat nach dem Sekanten-Tangentensatz gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte $PC \cdot PC'$ ist. Letztere Strecken sind zugleich Sekantenabschnitte in k'; deren Produkt ist damit nach dem Sekantensatz ebenfalls gleich $PB \cdot PB'$. Mit T als Schnittpunkt von BB' und g erhalten wir somit folgende Gleichungskette:

$$PF^2 = PF'^2 = PC \cdot PC' = PB \cdot PB' = (PT + TB) \cdot (PT - TB) = PT^2 - TB^2$$

(wegen $TB = TB'$). Die Dreiecke SFP und STP sind nun nach obiger Konstruktion bei F bzw. T rechtwinklig und es gilt weiter:

$$SF^2 = SP^2 - PF^2 = (ST^2 + PT^2) - PF^2 = ST^2 + PT^2 - PT^2 + TB^2 = SB^2,$$

also $SF = SB = SB'$, d. h., B, B' und F liegen auf einem Kreis um S. Da F auf dem Kreis k liegt, ist schließlich $s = AF = AS + SF = AS + SB$. $\square$

Bemerkung: Werden A und B als *Brennpunkte einer Ellipse* aufgefaßt, für welche s die Summe der Leitstrahlen bildet, haben wir hiermit die nicht ganz einfache Aufgabe gelöst, die Schnittpunkte einer beliebig gegebenen Geraden mit einer vorgegebenen Ellipse zu bestimmen.