A.2 Geometrische Örter

Oft werden bei der Lösung geometrischer Aufgaben Punkte in einer Ebene gesucht, die auf einer gewissen (geraden oder „krummen“) Linie liegen und dabei eine bestimmte Bedingung erfüllen. Gibt es außerhalb dieser Linie keinen weiteren Punkt, der die geforderte Eigenschaft besitzt, so nennt man diese Linie den *geometrischen Ort* aller Punkte, die gerade jene Bedingung erfüllen. Einfache Beispiele für geometrische Örter sind:

1. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung haben, ist ein *Kreis* um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt und mit der gegebenen Entfernung als Radius.

1.1. Der geometrische Ort für die Endpunkte gleich langer Tangenten desselben Kreises ist ein dem gegebenen *konzentrischer Kreis*.

1.2. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangentenpaare denselben Winkel einschließen, ist ein dem gegebenen *konzentrischer Kreis*.

1.3. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit gegebenem Radius, welche einen gegebenen Kreis berühren, wird von zwei dem gegebenen *konzentrischen Kreisen* gebildet, deren Radien gleich der Summe und der Differenz der gegebenen Radien sind.

2. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen Gerade eine gegebene Entfernung haben, besteht aus *zwei Geraden*, parallel der gegebenen in der gegebenen Entfernung.

2.1. Der geometrische Ort für die Spitzen aller gleich großen Dreiecke über derselben Grundlinie ist eine der Grundlinie *parallele Gerade*, denn die Dreiecke müssen alle dieselbe Höhe haben.

3. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten dieselbe Entfernung haben, ist die *Mittelsenkrechte* auf deren Verbindungsstrecke.

4. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Geraden dieselbe Entfernung haben, wird von *zwei aufeinander senkrechten Geraden* gebildet, welche die Winkel zwischen den gegebenen Geraden halbieren.

5. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei gegebenen Parallelen dieselbe Entfernung haben, ist die *Mittelparallele* zu den beiden gegebenen Parallelen.

6. **Thales-Kreis.** Der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, ist der Kreis über der Strecke AB als Durchmesser.

Ein geometrischer Ort kann aber auch ein einzelner Punkt oder ein flächenhaftes Gebiet der Ebene sein, je nachdem, wieviel Bedingungen gestellt werden. Allgemein ist festzustellen: Je mehr Bedingungen zu erfüllen sind, desto niedriger ist die Zahl der Freiheitsgrade und damit die Dimension des geometrischen Ortes.

Der Vorteil, den der Begriff geometrischer Ort bietet, besteht in der einfachen Umsetzung von Bedingungen, die bestimmte Punkte erfüllen sollen, in eine *Konstruktionsvorschrift*. Dabei können durchaus mehrere Bedingungen miteinander verknüpft sein. Der zweifellos am häufigsten auftretende Fall ist der, daß Bedingung X *und* Bedingung Y zu erfüllen sind, und somit der gesuchte geometrische Ort der *Schnittpunkt* $X \cap Y$ (im Sinne eines mengentheoretischen Durchschnitts) beider einzelner Orte ist. Wird z. B. ein Punkt P gesucht, der von zwei gegebenen Punkten A und B den Abstand $r \equiv AB$ hat, so kann mit Hilfe obiger Aussagen sofort gefolgert werden, daß P der Schnittpunkt der beiden Kreise $k_1 \equiv A_r$ und $k_2 \equiv B_r$ sein muß. Weiterhin ist damit auch klar, daß stets zwei Punkte P und P' existieren, die diese Bedingung erfüllen, nämlich diejenigen, für die die Dreiecke ABP und ABP' gleichseitig sind.