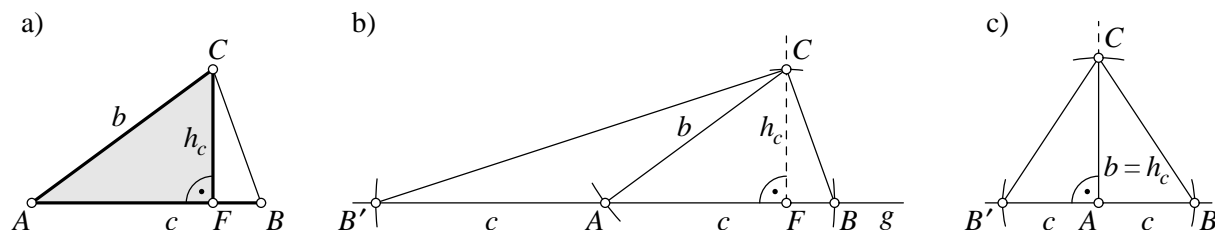


**B.11** Gesucht ist ein Dreieck, von dem zwei Seiten  $b$  und  $c$  sowie die Höhe  $h_c$  auf die eine von ihnen gegeben sind.

**B.11** *Analysis:* In dem beliebig gezeichneten  $\triangle ABC$  werden zunächst die drei als gegeben zu betrachtenden Stücke  $c$ ,  $b$  und  $h_c$  kräftig hervorgehoben (Bild a). Wir bemerken, daß das bei  $F$  rechtwinklige Teildreieck  $AFC$  aus  $h_c$  und  $b$  konstruierbar ist (dieses ist das vorn erwähnte Hilfsdreieck). Von dem verlangten Dreieck kennen wir nun die Ecken  $A$  und  $C$  sowie die Richtung der Seite  $AB$ . Den dritten Eckpunkt  $B$  finden wir, indem wir  $c$  auf dem Strahl  $AF$  abtragen.



*Konstruktion:* Wir zeichnen eine Gerade  $g$  und errichten auf dieser in einem beliebigen Punkt  $F$  die Senkrechte  $CF \equiv h_c$  (Bild b). Anschließend beschreiben wir  $C_b$ , der  $g$  in  $A$  schneidet, und  $A_c$ , der die Gerade in  $B$  trifft. Nun verbinden wir  $C$  mit  $A$  und  $B$ .

*Behauptung:*  $\triangle ABC$  ist das verlangte, d. h. es ist 1.  $AB = c$ ; 2.  $AC = b$ ; 3.  $CF = h_c$  und  $CF \perp AB$ .

*Beweis:* 1.  $AB = c$  als Radius des um  $A$  beschriebenen Kreises; 2.  $AC = b$  als Radius des um  $C$  beschriebenen Kreises; 3.  $CF = h_c$  und  $CF \perp AB$  nach obiger Konstruktion.  $\square$

*Determination:* Die Aufgabe ist stets lösbar, wenn  $b > h_c$  ist. Der Kreis  $C_b$  schneidet die Gerade  $g$  eigentlich in zwei Punkten  $A$  und  $A'$  (letzterer im Bild b nicht gezeigt). Diese Punkte liegen aber symmetrisch zu  $CF$ , und die beiden dadurch entstehenden Dreiecke  $CFA$  und  $CFA'$  sind kongruent; wir brauchen also nur einen Schnittpunkt zu berücksichtigen. Der Kreis  $A_c$  schneidet  $g$  ebenfalls in zwei Punkten  $B$  und  $B'$  (Bild b). Die Dreiecke  $ABC$  und  $AB'C$  sind hier jedoch voneinander verschieden; das eine Dreieck besitzt bei  $A$  einen spitzen Winkel, das andere bei  $A$  einen stumpfen Winkel. Es gibt also im Fall  $b > h_c$  zwei Lösungen.

Die Aufgabe ist auch lösbar, wenn  $b = h_c$  ist (Bild c). Dann fällt aber Punkt  $A$  mit  $F$  zusammen, und die Punkte  $B$  und  $B'$  liegen symmetrisch zu  $CA$ . Beide Dreiecke  $ABC$  und  $AB'C$  sind daher kongruent, und wir brauchen nur den einen Schnittpunkt  $B$  zu berücksichtigen. Es gibt also für  $b = h_c$  nur eine Lösung, und zwar ein rechtwinkliges Dreieck. Ist dagegen  $b < h_c$ , so gibt es keine Lösung, da dann der Kreis  $C_b$  die Gerade  $g$  nicht schneidet.