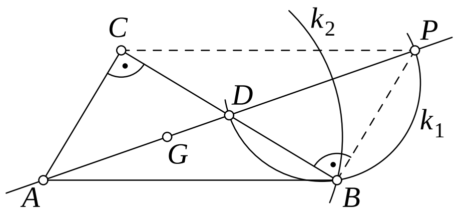
B.12 Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $m_a = 6\,\mathrm{cm}$, $m_b = 8\,\mathrm{cm}$. Dabei seien m_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und m_b die der Seitenhalbierenden von AC. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen m_a, m_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist. (*13. Mathematik-Olympiade 1973/74, Klasse 10, Stufe 4*)

B.12 (Bild) *Analysis:* a) Angenommen, $\triangle ABC$ entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann gibt es genau einen Punkt P, für den $ABPC$ ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen AP und BC werden durch ihren Schnittpunkt D halbiert. Ferner sind $\measuredangle DBP$ und $\measuredangle DCA$ Rechte, also liegt nach der Umkehrung des Satzes des THALES B auf einem Halbkreis über DP. Ist weiter G der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$, so gilt $AG = \frac{2}{3}m_a$ und $BG = \frac{2}{3}m_b$ (vgl. Aufgabe D.10). b) Daher genügt ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende *Konstruktion* erhalten werden kann:

- Wir konstruieren auf einer Geraden die Punkte A, G, D, P in dieser Anordnung so, daß $AD = DP = m_a$ und $AG = \frac{2}{3}m_a$ gilt.
- Wir schlagen einen Halbkreis k_1 über DP.
- Wir schlagen den Kreis k_2 um G mit $\frac{2}{3}m_b$. Schneidet er k_1 in einem Punkt, so sei dieser mit B bezeichnet.
- Wir verlängern die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge und erhalten damit den Punkt C.



c) *Beweis*, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist AD Seitenhalbierende der Länge m_a in $\triangle ABC$. Wegen $AG = \frac{2}{3}m_a$ ist G der Schwerpunkt von $\triangle ABC$, also enthält die Verlängerung von BG die Seitenhalbierende durch B. Wegen $BG = \frac{2}{3}m_b$ hat sie die Länge m_b. Schließlich ist nach dem Satz des THALES $\measuredangle PBD = 90°$ und wegen $\triangle ADC \cong \triangle PDB$ daher auch $\measuredangle ACB = 90°$.

d) Die ersten drei Konstruktionsschritte ergeben bis auf Kongruenz eindeutig A, G, D, P, k_1, k_2. Dabei haben k_1, k_2 die Radien $r_1 = \frac{1}{2}m_a = 3\,\text{cm}$ bzw. $r_2 = \frac{2}{3}m_b = \frac{16}{3}\,\text{cm}$ und den Mittelpunktsabstand $d = \frac{1}{3}m_a + \frac{1}{2}m_a = \frac{5}{6}m_a = 5\,\text{cm}$. Diese Längen erfüllen die Dreiecksungleichungen (vgl. Lösung zu Aufgabe U.13)

$$r_2 - r_1 = \frac{7}{3}\,\text{cm} < d = \frac{15}{3}\,\text{cm} < r_2 + r_1 = \frac{25}{3}\,\text{cm}.$$

Daher existiert genau ein Schnittpunkt B von k_1 mit k_2, und hiernach ist auch C durch den letzten Konstruktionsschritt bestimmt. Somit existiert $\triangle ABC$ mit den geforderten Eigenschaften und ist durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.