

C.12 Jana hat n Euro zur Verfügung. Sie will jeden Tag entweder ein Eis für einen Euro, Bonbons zu zwei Euro oder Schokolade zu zwei Euro kaufen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

C.12 Ist $a(n)$ die gesuchte Anzahl, so gilt offenbar die Rekursionsbeziehung $a(n+2) = a(n+1) + 2a(n)$. Diese hat die charakteristische Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$. Damit hat die Rekursion die allgemeine Lösung $a(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Setzen wir die bekannten Anfangswerte ein, so folgt die Lösung: $a(n) = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^n)$.