

**C.31** Beweise: Es gibt ganze, von null verschiedene Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $\max \{|a|, |b|, |c|\} < 1\,000\,000$ , derart, daß

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

**C.31** Für die Wahl dreier nichtnegativer ganzer Zahlen unter  $10^6$  hat man  $10^{18}$  Möglichkeiten. Für jeder solche Wahl gilt aber offenbar  $0 \leq a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} < 5 \cdot 10^6$ . Unterteilt man den Bereich zwischen 0 und  $5 \cdot 10^6$  also in Intervalle der Breite  $10^{-11}$ , so sind das weniger als  $10^{18}$  Stück und für zwei Tripel  $(a_1, b_1, c_1)$  und  $(a_2, b_2, c_2)$  landen die zugehörigen Zahlen im selben Intervall. Damit ist  $|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} + (c_1 - c_2)\sqrt{3}| < 10^{-11}$ .