$\boxed{\text{C.56}}$ Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems $(x+y)^3 = z$, $(x+z)^3 = y$ und $(y+z)^3 = x$.

C.56 Sei o. B. d. A. x die Betragsgrößte der drei Zahlen in einer Lösung. Dann gilt

$$z - y = (x+y)^3 - (x+z)^3 = (y-z)[(x+y)^2 + (x+y)(x+z) + (x+z)^2].$$

Wäre nun $z \neq y$, so wäre $-1 = (x+y)^2 + (x+y)(x+z) + (x+z)^2$, was nicht sein kann, weil rechts nur positive Summanden stehen (weil x betragsmaximal ist). Also ist $y = z$. Wäre $x \neq y$, so folgt aus der analogen Gleichung

$$x - y = (y+z)^3 - (x+z)^3 = (y-x)[(y+z)^2 + (y+z)(x+z) + (x+z)^2],$$

die Beziehung $-1 = (y+z)^2 + (y+z)(x+z) + (x+z)^2 = 4y^2 + 2y(x+y) + (x+y)^2 = (x+2y)^2 + 3y^2$, was auch einen Widerspruch darstellt. Also ist $x = y = z$. Damit sind alle möglichen Lösungen (a, a, a) mit $8a^3 = a$, also $a = 0$ oder $a = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.