C.64 In der Zahl $7^{2\,000}$ wird die erste Ziffer gestrichen und zur restlichen Zahl hinzuaddiert. Dies wird solange getan, bis nur noch eine 10 stellige Zahl übrigbleibt. Zeige: In dieser Zahl kommt eine Ziffer doppelt vor.

C.64 Die Zahl 7^{2000} lässt bei Division durch 3 den Rest 1, denn 7 lässt diesen Rest. Damit lässt auch die Quersumme dieser Zahl den Rest 1 modulo 3. Da eine Zahl immer denselben Rest modulo 3 lässt wie ihre Quersumme, ändert sich dies auch nach einem erlaubten Schritt nicht: Ist $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv 1 \mathrm{mod} 3$, so auch $Q(\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv 1 \mathrm{mod} 3$. Also auch $a_1 + (a_2 + \ldots + a_n) \equiv a_1 + \overline{a_2 \ldots a_n} \equiv 1 \mathrm{mod} 3$.
Damit muss die letzte aus zehn Ziffern bestehnde Zahl auch den Rest 1 modulo 3 lassen. Eine zehnstellige Zahl, die keine Ziffer doppelt enthält, hat aber die Quersumme $0+1+2+\ldots+9 = 45 \equiv 0 \mathrm{mod} 3$.