C.1.4 Zählen durch Rekursion

Oft kann man für gewisse Anzahlen nur rekursive Beziehungen herleiten. Ist dann die gewünschte Anzahlformel allgemein schon gegeben, so kann man sie damit dann recht leicht über das Prinzip der vollständigen Induktion zeigen. Ansonsten kann man in vielen Fällen die Formel auch aus der Rekursion wiedergewinnen. Hat man nämlich für die Anzahl $A(n)$ die Rekursion $A(n+2) = pA(n+1) + qA(n)$, so kann man den Ansatz $A(n) = x^n$ versuchen (mit einer unbekannten Zahl x) und erhält nach Division durch x^n die zugehörige *charakteristische Gleichung* $x^2 = px + q$. Hat diese nun zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2, so ist die allgemeine Lösung für $A(n)$ gegeben durch $A(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt man aus den Anfangsbedingungen.

Beispiel 1: Man bestimme die Anzahl $A(n)$ der Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, in denen es keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

Eine solche Menge enthält entweder die Zahl n und dann weitere Zahlen kleiner oder gleich $n-2$, was auf $A(n-2)$ Arten geht, oder sie enthält die Zahl n nicht und ist demnach eine der $A(n-1)$ Teilmengen von $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Daraus folgt: $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$. Die charakteristische Gleichung dieser Rekursion ist $x^2 - x - 1 = 0$ und hat die beiden Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Damit erhält man $A(n) = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$. Für $n = 1$ ist $A(0) = c_1 + c_2 = 0$, also $c_1 = -c_2$. Damit also $A(n) = c_1 \cdot (x_1^n - x_2^n)$. Aus $A(1) = 1$ folgt dann noch $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Man erhält damit die explizite Gleichung für die Anzahl zu

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \tag{C.6}$$

Bemerkung: Die betrachtete Folge $A(n)$ ist übrigens die bekannte *Fibonacci-Folge* $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ und die Formel (C.6) heißt BINETsche Formel.