C.2.1 Divisionsreste

Bekanntlich kann man natürliche Zahlen m und n durcheinander mit Rest dividieren.

$$m = p \cdot n + r,$$

wobei $0 \leq r < n$ gilt. Man hat also genau n verschiedene Reste bei einer solchen Division. Lassen zwei Zahlen a und $b > a$ bei Division durch n nun denselben Rest r, ist also $a = pn + r$ und $b = qn + r$, so ist ihre Differenz durch n teilbar, denn

$$b - a = (qn + r) - (pn + r) = (q - p)n.$$

Häufig hat man als Schubfächer die Reste bei Division durch eine natürliche Zahl n. Indem man dann zeigt, dass zwei Zahlen im selben Schubfach liegen, hat man gezeigt, dass deren Differenz durch n teilbar ist.

Beispiel 1: Welches ist die kleinste natürliche Zahl N mit folgender Eigenschaft: Unter N natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe durch zwei, deren Differenz durch 7 teilbar ist?

Hier werden als Schubfächer die Reste bei der Division durch 7 gewählt. Damit kann man zeigen, dass $N \leq 5$ ist. Hat man nämlich fünf natürliche Zahlen und ordnet sie dann entsprechend ihrer Reste in die vier Schubfächer „Rest 0", „Rest 1 oder 6", „Rest 2 oder 5" und „Rest 3 oder 4" ein, so sind nach dem Schubfachprinzip in einem Fach zwei Zahlen. Lassen diese denselben Rest bei Division durch 7, so ist deren Differenz, ansonsten ihre Summe durch 7 teilbar. Dass $N \geq 5$ ist, zeigt ein Beispiel von vier Zahlen ohne die gewünschte Eigenschaft, wie $\{7, 8, 9, 10\}$. Also folgt $N = 5$.

Besonders interessant ist oft auch der Rest bei Division durch eine Zehnerpotenz. Dies entspricht nämlich gerade der Betrachtung der letzten Ziffern einer natürlichen Zahl.

Beispiel 2: Man betrachte die Zahlen der FIBONACCI-Folge F_n, die durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ definiert ist. Man beweise, dass es für jedes N eine Zahl in dieser Folge gibt, die auf N Neunen endet.

Hierzu betrachtet man den Rest bei Division durch 10^N. Es gibt nur $(10^N)^2$ mögliche Paare von Resten. Da es aber unendlich viele Paare von FIBONACCI-Zahlen (F_n, F_{n+1}) gibt, gibt es nach Schubfachprinzip zwei solche Paare (F_k, F_{k+1}) und (F_j, F_{j+1}) $(k < j)$, so dass F_k und F_j sowie F_{k+1} und F_{j+1} gleiche Reste lassen. Nach Rekursion lassen dann aber auch $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ und $F_{j-1} = F_{j+1} - F_j$ den gleichen Rest bei Division durch 10^N. So weitermachend erhält man, dass auch die Paare $(F_0, F_1) = (0, 1)$ und (F_{j-k}, F_{j-k+1}) gleiche Reste lassen. Dann lässt aber $F_{j-k-1} = F_{j-k+1} - F_{j-k}$ den Rest $1 - 0 = 1$ und dann $F_{j-k-2} = F_{j-k} - F_{j-k-1}$ den Rest $0 - 1 = -1$, was aber dem Rest $999\ldots 99$ entspricht, also N Ziffern Neun.