C.4 Invarianten

Geht es in einer Aufgabe um einen Algorithmus, bei dem etwas wiederholt durchgeführt wird (ein Spiel bestehend aus Zügen, ein rekursiv definierte Zahlenfolge usw.), so ist gelegentlich die Antwort auf eine Frage der Art: „Kann ein gewisser Endzustand erreicht werden?“ oder „Welche Endzustände können erreicht werden?“ gesucht. Dann ist es oft den Versuch wert nach einer *Invarianten* zu suchen, also nach einer Funktion oder Größe, die sich während der Rekursion oder den Zügen des Spiels nicht ändert. Oft verwendete Invarianten sind hierbei die *Parität* von Zahlen (gerade oder ungerade) oder allgemeiner die Teilbarkeit durch eine bestimmte Zahl, oder aber auch die Summe bestimmter Zahlen, oder aber bei Punkten in der Ebene der Abstand vom Ursprung usw.

Beispiel 1: Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2n$. Ein Spieler darf nun solange jeweils zwei Zahlen a und b auf der Tafel wegwischen und durch die Zahl $|a-b|$ ersetzen, bis nur noch eine Zahl übrigbleibt. Man zeige, dass diese letzte Zahl in jedem Fall ungerade ist!

In der Aufgabe sind schon kleine Hinweise zur Lösung gegeben. Zum einen, dass die Zahl n ungerade sein soll, zum anderen natürlich die Behauptung, dass auch die letzte Zahl ungerade sein soll. Beides weist auf die Parität hin. Nur die Parität wovon? Es bietet sich hier nun an (und das ist wie so oft der Punkt in der Lösung einer Aufgabe, an dem man ein bisschen „rumprobieren“ muss), die Summe S der auf der Tafel stehenden Zahlen zu betrachten. Zu Beginn ist diese gleich $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = n(2n+1)$, also weil n ungerade sein soll in jedem Fall ungerade (und diese Beobachtung ist ein sicheres Zeichen, dass man auf dem richtigen Weg ist). Was passiert nun bei einem Zug mit S? Sind a und b die gestrichenen Zahlen, so ergibt sich die neue Summe S' zu $S' = S - a - b + |a-b| = S - 2 \cdot \min(a,b)^{\dagger}$. Ist die Summe anfangs ungerade, so ändert dies sich also nach einem Zug nicht. Also ist auch die letzte übrigbleibende Zahl, als „Summe“ aller (nämlich einer) auf der Tafel stehender Zahlen, ungerade.

Beispiel 2: Jede der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ sei 1 oder -1. Man beweise: Ist

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0,$$

so gilt $4|n$.

Ändert man das Vorzeichen eines der a_i, so ändern sich genau vier der Terme in S. Sind zwei positiv und zwei negativ, so ändert sich nichts. Sind drei positiv und einer negativ (oder umgekehrt), so ändert sich S um ± 4. Haben letztlich alle gleiches Vorzeichen, so ändert sich S um ± 8. Insgesamt bleibt der Rest von S bei Division durch 4 erhalten, ist also eine Invariante. Ändert man alle Vorzeichen schrittweise zu „+“, so ist $S = n$. Anfangs war $S = 0$ durch 4 teilbar. Also ist auch n durch 4 teilbar.

[†] Hier wurde benutzt, dass $\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$. Dies zeigt man am besten durch Fall