C.5 Färbungen

Dieses Prinzip kommt meist dann zur Anwendung, wenn es in der Aufgabe um ein Spiel oder eine Rekursion geht, bei der Objekte auf Feldern platziert oder darauf bewegt werden. Am bekanntesten hierbei sind Schachbrettaufgaben in den vielfältigsten Variationen. Die Frage ist meist, ob dabei dann ein gewisser Endzustand erreicht werden kann oder ob eine bestimmte Aufgabe erfüllt werden kann.

In jedem Fall versucht man, das Spielfeld in geeigneter Weise in Teilmengen zu zerlegen (und diese dann zu färben), so dass bei Spielzügen eine gewisse Regelmäßigkeit auftritt, zum Beispiel immer nur Felder einer bestimmten Farbe betreten werden oder ähnliches. In diesem Sinne handelt es sich also um ein Prinzip, das oft zusammen mit dem Invarianzprinzip verwendet wird. Aber langer Rede kurzer Sinn: Ein

Beispiel 1: Auf einem Schachbrett mit 8×8 Feldern steht in der linken unteren Ecke ein Springer. Kann dieser im Rösselsprung (zwei vor – eins zur Seite, oder eins vor – zwei zur Seite) genau einmal jedes Feld berühren und zuletzt in der gegenüberlegenden Ecke ankommen?

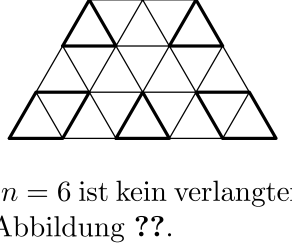
Hier ist die zum Beweis nötige Färbung durch das Schachbrett schon vorgegeben. Das Feld, auf dem der Springer zu Beginn steht, sei o. B. d. A. schwarz. Dann ist die gegenüberliegende Ecke auch schwarz gefärbt. Bei jedem Sprung ändert sich die Farbe des Feldes, auf dem der Springer steht. Also muss der Springer nach 63 Zügen wieder auf einem weißen Feld stehen, insbesondere nicht in der gegenüberliegenden Ecke!

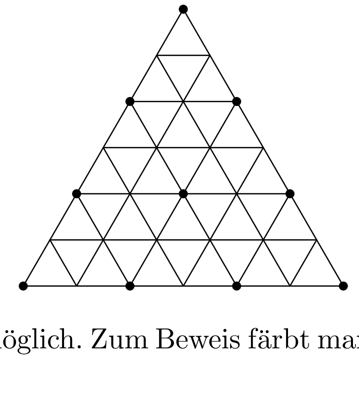
Beispiel 2: Ein gleichseitiges Dreieck ABC sei durch Parallelen zu den Seiten in kongruente gleichseitige Dreiecke geteilt, derart, daß die Seiten von ABC in n kongruente Abschnitte unterteilt werden. Auf diesem „Wegenetz“ laufen Käfer folgendermaßen:

- Zu Beginn sitzt an jedem Knoten genau ein Käfer.
- Alle Käfer laufen mit gleicher Geschwindigkeit.
- Erreicht ein Käfer einen Knoten, so dreht er sich um $\pm 60^\circ$ oder $\pm 120^\circ$ und läuft sofort weiter.

Man zeige, daß für $n = 5$ die Käfer so laufen können, daß sich zu keinem Zeitpunkt zwei von ihnen an einem Knoten treffen. Ist dies auch für $n = 6$ möglich?

Dass es einen Weg der Käfer für $n = 5$ gibt, zeigt das Bild (L.1). Die Käfer bewegen sich einfach im Uhrzeigersinn entlang der dicken Linien.





Im Fall $n = 6$ ist kein verlangter Lauf der Käfer möglich. Zum Beweis färbt man das Dreieckraster wie in Abbildung **??**.

Insgesamt laufen in diesem Fall $7 + 6 + \ldots + 2 + 1 = 28$ Käfer. An den markierten Punkten sind zu den Zeitpunkten, an denen die Käfer an den Knoten vorbeikommen, stets 10 Käfer. Ein Käfer, der sich in erlaubten Bahnen bewegt kann aber, von einem markierten Punkt kommend, erst wieder nach frühestens drei Zügen auf einem markierten Punkt landen (nach dem ersten Schritt muss er ja abbiegen). Das heißt, dass in drei Perioden $3 \cdot 10$ verschiedene Käfer an den markierten Punkten vorbeikommen. Das ist ein Widerspruch, da es nur 28 sind.