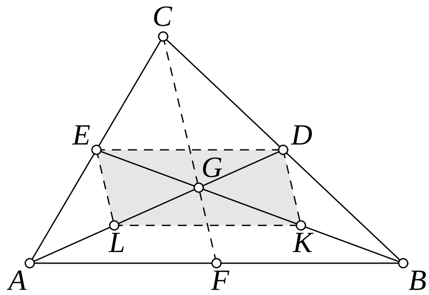
D.10 Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt G des Dreiecks. — In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden?

D.10 *Beweis:* (Bild) G sei der Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden AD und BE. Die Dreiecke ACB und ECD sind ähnlich, da sie den Winkel bei C gemeinsam haben und

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$$



gilt. Mithin sind auch die Winkel $\measuredangle CED$ und $\measuredangle CAB$ gleich (Stufenwinkel), d. h. ED ist parallel zu AB und nach dem zweiten Strahlensatz halb so groß wie die Grundseite AB. Weiterhin seien L und K die Mittelpunkte der Strecken AG und BG. Dann folgt aus den vorangegangenen Überlegungen, jetzt bezogen auf das Dreieck ABG, daß $LK \parallel AB$ und $LK = \frac{1}{2}AB = ED$ ist. Das Viereck $DELK$ ist somit ein Parallelogramm. Da sich die Diagonalen in einem Parallelogramm stets halbieren, gilt

$$DG = GL = LA, \quad EG = GK = KB \qquad \text{bzw.} \qquad DG = \frac{1}{3}AD, \quad EG = \frac{1}{3}BE.$$

Somit teilt G die beiden Seitenhalbierenden AD und BE im Verhältnis $2:1$, wobei das *längere* Teilstück die Entfernung zum jeweiligen Eckpunkt ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß der gleiche Punkt G Schnittpunkt eines der beiden anderen Paare von Seitenhalbierenden, etwa von BE und CF ist. Damit ist der Schwerpunkt G als gemeinsamer Schnittpunkt aller drei Seitenhalbierenden nachgewiesen. □