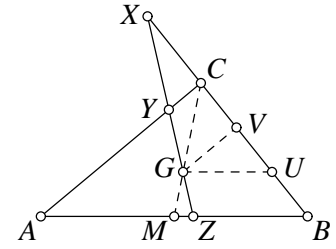


D.12 Eine Gerade durch den Schwerpunkt G eines Dreiecks schneide dessen (ggf. verlängerte) Seiten in den Punkten X, Y, Z . Man beweise, daß dann für die *gerichteten* Strecken GX, GY, GZ (s. dazu Abschnitt D.2) gilt:

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0.$$

D.12 *Beweis:* (Bild) Wir erinnern uns daran, daß G die Seitenhalbierende CM im Verhältnis $2 : 1$ teilt und dritteln daher die Seite BC durch die Punkte U, V so, daß $BU = UV = VC$ gilt. Dann ist wegen $CG : CM = CU : CB = 2 : 3$ nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $GU \parallel AB$ und ebenso $GV \parallel AC$. Weiterhin gilt aufgrund des ersten Strahlensatzes mit $UV = VC = -UB$:



$$\begin{aligned} GX \left(\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} \right) &= 1 + \frac{VX}{VC} + \frac{UX}{UB} \\ &= 1 + \frac{VX - UX}{VC} = 1 + \frac{VU}{UV} = 0, \end{aligned}$$

also nach Division durch GX die behauptete Gleichung. \square