

- D.21** Die Höhen in einem spitzwinkligen Dreieck halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks. *Oder anders ausgedrückt:* Der Höhenschnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.

**D.21** *Beweis:* (Bild) Die Punkte  $D, E, F$  seien die Fußpunkte der Höhen im Dreieck  $ABC$ , das Dreieck  $DEF$  ist damit das Höhenfußpunktdreieck. Da die Winkel  $\angle AEB = \angle ADB$  Rechte sind, liegen die Punkte  $D, E$  auf dem THALES-Kreis über dem Durchmesser  $AB$ , d. h., das Viereck  $ABDE$  ist ein Sehnenviereck. Bezeichnen wir  $\angle ADE \equiv \varepsilon_1$  und  $\angle ADF \equiv \varepsilon_2$ , so gilt, da sich gegenüberliegende Innenwinkel in einem Sehnenviereck zu  $180^\circ$  ergänzen (vgl. Aufgabe V.21):

$$\angle EAB + \angle EDB = \angle EAB + \varepsilon_1 + 90^\circ = 180^\circ.$$

Ebenso ist  $CAFD$  ein Sehnenviereck mit

$$\angle CAF + \angle CDF = \angle CAF + \varepsilon_2 + 90^\circ = 180^\circ.$$

Wegen  $\angle EAB = \angle CAF$  folgt aus beiden Gleichungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , d. h., die Höhe  $AD$  ist Winkelhalbierende im Höhenfußpunktdreieck  $DEF$ . Ebenso beweisen wir  $\angle BEF = \angle BED$  und  $\angle CFD = \angle CFE$ . Mithin ist  $H$  als Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden im Dreieck  $DEF$  dessen Inkreismittelpunkt.  $\square$

