

D.24 Satz von Carnot. In jedem Dreieck ist die Summe der Abstände des Umkreismittelpunktes zu den (Mittelpunkten der) Seiten gleich der Summe aus Umkreisradius R und Inkreisradius r .

D.24 *Beweis:* (Bild) Wir beschränken uns auf ein spitzwinkliges Dreieck ABC , in dem DEF das Höhenfußpunktdreieck und KLM das Seitenmittendreieck sei. Mit den Bezeichnungen $u \equiv OK$, $v \equiv OL$ und $w \equiv OM$ sowie der Zerlegung $\Delta = [ABC] = [AOB] + [BOC] + [COA]$ lassen sich folgende Beziehungen für den Flächeninhalt aufstellen (vgl. Aufgabe D.63):

$$2\Delta = r(a + b + c) = au + bv + cw. \quad (\text{D.102})$$

Ferner ist leicht einzusehen, daß folgende rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind:

$$\triangle BAE \sim \triangle CAF \sim \triangle BOK \sim \triangle COK,$$

da sie außer dem Rechten den Winkel $\alpha = \angle BAE = \angle CAF = \angle BOK = \angle COK$ gemeinsam haben (letzteres wegen $\angle BOC = 2\alpha$ und $\triangle BOC$ gleichschenkelig, vgl. Aufgabe K.4 oder D.27). Aus diesen Ähnlichkeiten lassen sich nun folgende Gleichungen gewinnen:

$$\frac{EA}{c} = \frac{AF}{b} = \frac{u}{R} = \frac{EA + AF}{b + c} \quad \implies \quad u(b + c) = R(EA + AF).$$

Analog erhalten wir $v(c + a) = R(FB + BD)$ und $w(a + b) = R(DC + CE)$. Addieren wir die letzten drei Gleichungen, so folgt

$$(u + v + w)(a + b + c) - (au + bv + cw) = R(a + b + c),$$

und, wenn wir hier noch (D.102) einsetzen und durch $a + b + c > 0$ dividieren, die Behauptung: $u + v + w = R + r$. \square

Bemerkung: Der Satz von CARNOT gilt in gleicher Weise auch für stumpfwinklige Dreiecke, wenn außerhalb des Dreiecks liegende Abstände u , v , w negativ gezählt werden.

