

D.28 In einem spitzwinkligen Dreieck ABC haben die Umkreise der Dreiecke HAB , HBC und HCA (mit H als Höhenschnittpunkt) stets denselben Radius wie der Umkreis von $\triangle ABC$.

D.28 *Beweis:* (Bild) Wir brauchen uns nur an die Aufgabe D.23 erinnern: Spiegeln wir H an den Dreieckseiten, liegen diese Punkte auf dem Umkreis von $\triangle ABC$. Mit der Spiegelung erzeugen wir offensichtlich drei Paare kongruenter Dreiecke, nämlich

$$\begin{aligned} \triangle HBC &\cong \triangle D'BC, & \triangle HCA &\cong \triangle E'CA, \\ \triangle HAB &\cong \triangle F'AB. \end{aligned}$$

Die Umkreise der rechts stehenden Dreiecke fallen also mit dem Umkreis von $\triangle ABC$ zusammen, und – da kongruente Dreiecke gleiche Umkreise haben – sind die Umkreise der links stehenden Dreiecke ebenso groß. \square – Vgl. Aufgabe K.63.

Bemerkung: Man könnte den Satz auch so formulieren:

Ist $ABCH$ ein orthozentrisches Viereck, dann haben die Umkreise der vier Dreiecke, die entstehen, wenn man je drei seiner Eckpunkte nimmt, gleiche Radien.

