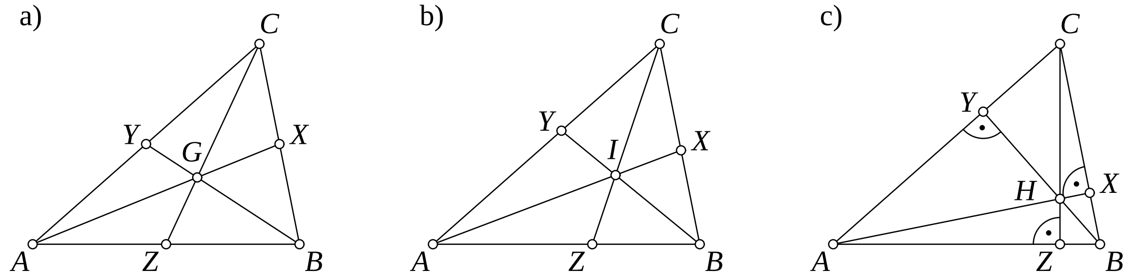
D.34 Unter Verwendung der Umkehrung des Satzes von Ceva ist zu beweisen, daß sich a) die Seitenhalbierenden, b) die Winkelhalbierenden und c) die Höhen eines Dreiecks stets in einem Punkt schneiden.

D.34 *Beweise:* a) Sind die Punkte X, Y, Z die Seitenmitten von BC, CA, AB (Bild a), so beträgt jeder Teilungsfaktor

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = 1, \quad \text{somit auch} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt. □



b) Bezeichnen jetzt X, Y, Z die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit deren gegenüberliegenden Seiten und wie üblich $BC \equiv a$, $CA \equiv b$, $AB \equiv c$ (Bild b), so gilt nach dem Satz aus Aufgabe D.8

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{b}{a}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{a}{c}, \quad \text{also} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{bca}{abc} = 1, \tag{D.103}$$

so daß sich die drei Winkelhalbierenden ebenfalls in einem Punkt schneiden. □
c) Schließlich seien X, Y, Z die Höhenfußpunkte auf BC, CA, AB (Bild c). Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke CZB und ABX ähnlich, da sie außer dem Rechten den Winkel $\measuredangle ABC$ gemeinsam haben, also in allen drei Winkeln übereinstimmen. Somit gilt

$$\frac{ZB}{CB} = \frac{BX}{AB} \quad \text{oder} \quad \frac{BX}{ZB} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}.$$

Analog folgt $\triangle AXC \sim \triangle BCY$ bzw. $\triangle BYA \sim \triangle CAZ$ und daraus $CY/XC = a/b$ sowie $AZ/YA = b/c$. Die Multiplikation dieser drei Verhältnisgleichungen liefert wiederum (D.103); damit schneiden sich auch die Höhen in einem gemeinsamen Punkt. □