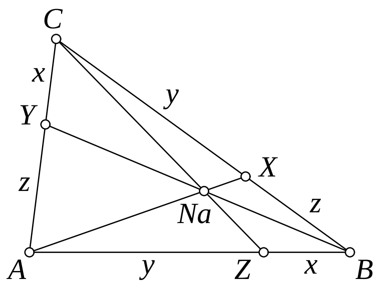
D.40 **Nagels Punkt.** In einem Dreieck ABC schneiden sich die Strecken AX, BY und CZ stets in einem Punkt Na, wobei X, Y, Z die Berührungspunkte der drei Ankreise mit den Seiten BC, CA, AB sind.

D.40 *Beweis:* (Bild) Da die Berührungspunkte der Ankreise und die Halbumfangspunkte zusammenfallen (s. Aufgabe D.35), genügt es, hier nur letztere zu betrachten. Die Bedingung dafür, daß z. B. Punkt X auf der Seite BC gerade auf halbem Umfange liegt, ist $c + BX = XC + b$; andererseits ist $BX + XC = a$. Dieses einfache lineare Gleichungssystem hat die Lösung



$$BX = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c \equiv z,$$

$$XC = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b \equiv y.$$

Analog gilt für die anderen Halbumfangspunkte Y, Z:

$$CY = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a \equiv x, \qquad YA = z, \qquad AZ = y, \qquad ZB = x.$$

Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, ergibt sich

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1,$$

womit nach der Umkehrung des Satzes von Ceva die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Bezüglich der Größen x, y, z vgl. auch Aufgabe D.63 sowie Abschnitt G.1.1.