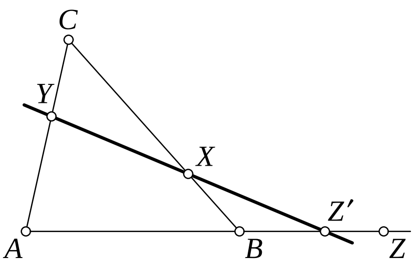
$\boxed{\text{D.45}}$ **Umkehrung des Satzes von Menelaus.** Wenn für drei Punkte X, Y, Z auf den Seiten eines Dreiecks die Gleichung (D.3) gilt, dann sind X, Y, Z kollinear.

D.45 *Beweis:* (Bild) X, Y und Z seien drei Punkte, jeder auf einer Seite des Dreiecks ABC, für die das Produkt der gegebenen Verhältnisse gleich -1 sei. Außerdem schneide XY die Seite AB in Z'. Zu zeigen ist also $Z' = Z$. Der Satz von MENELAUS fordert nun für den Punkt Z'



$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1,$$

was jedoch

$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \quad \text{bzw.} \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}, \quad \frac{AZ' + Z'B}{Z'B} = \frac{AZ + ZB}{ZB}$$

bedeutet. Wegen $AB = AZ' + Z'B = AZ + ZB$ muß folglich $Z'B = ZB$ bzw. $Z' = Z$ sein, d. h., X, Y und $Z = Z'$ sind in der Tat kollinear. $\square$