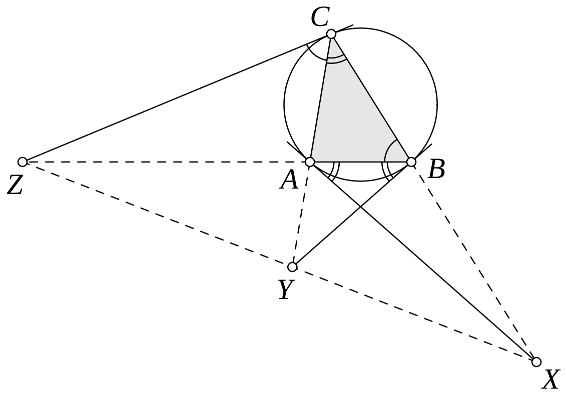
D.47 Die Tangenten an den Umkreis eines Dreiecks in dessen Eckpunkten schneiden die jeweils gegenüberliegenden (verlängerten) Seiten in drei kollinearen Punkten.
Singapore Mathematical Society Interschool Competition, 1989

D.47 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Tangenten in A, B, C mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten mit X, Y, Z. Der Satz von MENELAUS verlangt nun die Berechnung der Verhältnisse AZ/ZB, BX/XC und CY/YA. Die darin auftretenden sechs Längen sind Seiten von Dreiecken, die in dieser Figur zahlreich vorhanden sind. Wenn wir also ähnliche Dreiecke finden, können wir auf eine Lösung hoffen. Tatsächlich ist z. B. im Dreieck ZCA der Winkel bei C Sehnen-Tangentenwinkel über der Sehne CA und damit gleich dem Peripheriewinkel $\measuredangle ABC = \measuredangle ZBC$. Die beiden Dreiecke ZCA und ZBC haben außerdem noch den Winkel bei Z gemeinsam, sind somit ähnlich. Analog schließen wir aus $\measuredangle YBA = \measuredangle YCB = \measuredangle ACB = \measuredangle XCA = \measuredangle XAB$: $\triangle XAB \sim \triangle XCA$ und $\triangle YBC \sim \triangle YAB$. Aus den so gewonnenen Ähnlichkeiten lesen wir nun folgende Proportionen ab:



$$\frac{AZ}{CZ} = \frac{CZ}{ZB} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{BX}{AX} = \frac{AX}{XC} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{CY}{BY} = \frac{BY}{YA} = \frac{a}{c}.$$

Die Seiten AB, BC und CA werden also äußerlich in den Verhältnissen

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ}{CZ} \cdot \frac{CZ}{ZB} = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{BX}{AX} \cdot \frac{AX}{XC} = -\frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{CY}{BY} \cdot \frac{BY}{YA} = -\frac{a^2}{c^2}$$

geteilt. Multiplikation aller drei Gleichungen ergibt $(AZ/ZB)\cdot(BX/XC)\cdot(CY/YA) = -1$; nach der Umkehrung des Satzes von MENELAUS liegen X, Y, Z daher auf einer Geraden. $\square$