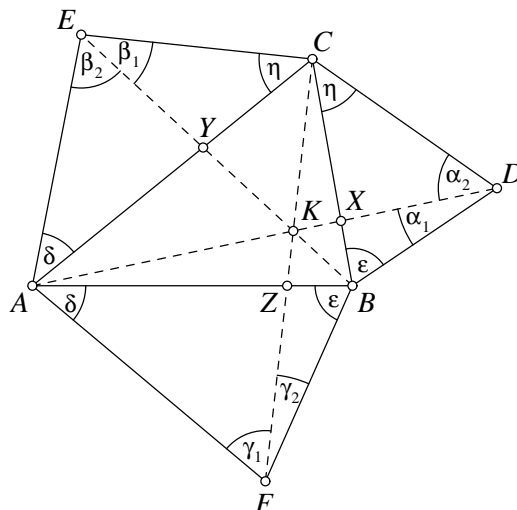


D.48 In einem Dreieck ABC werden in den Eckpunkten A , B und C jeweils gleich große Winkel δ , ε bzw. η nach außen abgetragen. Die freien Schenkel treffen sich in den Punkten D , E , F , die in dieser Reihenfolge den Eckpunkten A , B , C gegenüberliegen. Man beweise, daß AD , BE und CF sich in einem Punkt schneiden.

D.48 *Beweis:* (Bild) Durch die beschriebene Konstruktion entstehen drei Aufsatzdreiecke BDC , CEA und AFB , die durch die Geraden AD , BE bzw. CF in insgesamt sechs kleinere Dreiecke zerlegt werden. Führen wir noch die im Bild bezeichneten Winkel α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 ein, können wir mit Hilfe des Sinussatzes die benötigten Abschnitte auf den Dreieckseiten berechnen:

$$\begin{aligned} AZ &= FZ \frac{\sin \gamma_1}{\sin \delta}, & ZB &= FZ \frac{\sin \gamma_2}{\sin \varepsilon}, \\ BX &= DX \frac{\sin \alpha_1}{\sin \varepsilon}, & XC &= DX \frac{\sin \alpha_2}{\sin \eta}, \\ CY &= EY \frac{\sin \beta_1}{\sin \eta}, & YA &= EY \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta}. \end{aligned}$$



Unser Zielausdruck (D.2) nimmt damit zunächst folgende Form an:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}. \quad (\text{D.104})$$

Die Hilfswinkel $\alpha_1, \dots, \gamma_2$ werden wir wieder los, indem wir die Dreiecke ABD , CAD , BCE , ABE , CAF , BCF heranziehen: Diese haben paarweise die Winkel $\beta + \varepsilon$, $\gamma + \eta$ und $\alpha + \delta$ sowie die Seiten AD , BE , CF gemeinsam. Der Sinussatz liefert hier:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \sin(\beta + \varepsilon) \frac{c}{AD}, & \sin \alpha_2 &= \sin(\gamma + \eta) \frac{c}{AD}, \\ \sin \beta_1 &= \sin(\gamma + \eta) \frac{a}{BE}, & \sin \beta_2 &= \sin(\alpha + \delta) \frac{a}{BE}, \\ \sin \gamma_1 &= \sin(\alpha + \delta) \frac{b}{CF}, & \sin \gamma_2 &= \sin(\beta + \varepsilon) \frac{b}{CF}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Gleichungen in (D.104) ein, kürzt sich auf wundersame Weise alles heraus, so daß tatsächlich 1 übrig bleibt und damit nach der Umkehrung des Satzes von CEVA die Behauptung bewiesen ist. \square