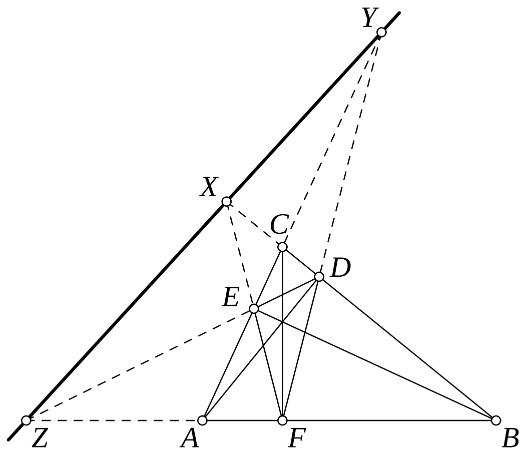
D.49 $\triangle DEF$ sei das Höhenfußpunktdreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ABC mit D auf BC, E auf CA und F auf AB. Die verlängerten Seiten EF, FD und DE mögen die verlängerten Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten X, Y bzw. Z schneiden. Beweise, daß X, Y und Z kollinear sind.

D.49 (Bild) Da hierbei die interessierenden Punkte X, Y und Z sowohl auf den verlängerten Seiten des Dreiecks ABC als auf denen von DEF liegen, stehen wir vor der Entscheidung, ob wir $AZ \cdot BX \cdot CY = ZB \cdot XC \cdot YA$ oder lieber $DZ \cdot EX \cdot FY = ZE \cdot XF \cdot YD$ in Angriff nehmen. Nach etwas Probieren und Überlegen zeigt es sich, daß letzteres einfacher ist, und kommen auf folgenden *Beweis:* Bekanntlich sind die Höhen die (Innen-)Winkelhalbierenden im Höhenfußpunktdreieck DEF (vgl. Aufgabe D.21). Daraus folgt:



$$\measuredangle BDF = \measuredangle XDE = \measuredangle YDX$$

Damit ist DX Winkelhalbierende des Außenwinkels $\measuredangle YDE$, und X teilt die Seite EF äußerlich im Verhältnis der anliegenden Seiten (vgl. Aufgabe D.8):

$$\frac{EX}{XF} = -\frac{DE}{FD}.$$

Gleiches gilt auch an den anderen beiden Eckpunkten des Dreiecks DEF:

$$\measuredangle AEF = \measuredangle YED = \measuredangle YEX \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{FY}{YD} = -\frac{EF}{DE},$$
$$\measuredangle BFD = \measuredangle ZFE = \measuredangle YEX \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{DZ}{ZE} = -\frac{FD}{EF}.$$

Damit ist das Produkt der drei Quotienten -1, und nach der Umkehrung des Satzes von Menelaus liegen X, Y und Z auf einer gemeinsamen Geraden. □