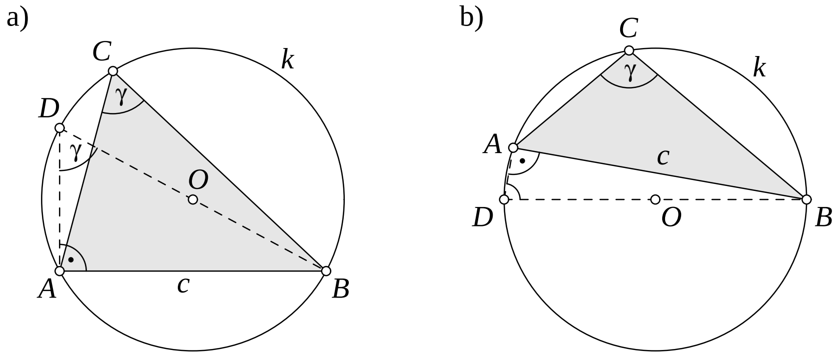
$\boxed{\text{D.5}}$ **Erweiterter Sinussatz.** In jedem Dreieck gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \tag{D.1}$$

D.5 *Beweis:* Wir betrachten sowohl ein spitzwinkliges Dreieck (Bild a) als auch ein stumpfwinkliges Dreieck (Bild b) und zeichnen jeweils den Durchmesser BD und die Sehne AD des Umkreises k in unsere Planfigur ein. In beiden Fällen bemerken wir, daß $\measuredangle BAD$ ein Rechter ist, da er einem Halbkreis einbeschrieben ist. Es gilt somit

$$\sin(\measuredangle BDA) \equiv \sin\gamma = \frac{c}{BD} = \frac{c}{2R}. \tag{D.101}$$

Dabei ist in Bild a) nach dem Peripheriewinkelsatz $\measuredangle BDA = \measuredangle BCA = \gamma$; in Bild b) $\measuredangle BDA = 180^\circ - \measuredangle BCA = 180^\circ - \gamma$, da sich gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck $ADBC$ zu 180°



ergänzen. Wegen $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$ ist also in beiden Fällen $\sin(\measuredangle BDA) = \sin(\measuredangle BCA)$. (D.101) umgestellt ergibt mithin

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Die gleiche Prozedur auf die beiden anderen Winkel $\alpha \equiv \measuredangle CAB$ und $\beta \equiv \measuredangle ABC$ des Dreiecks ABC angewandt, ergibt die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Wir sollten uns beim Sinussatz also nicht nur die Tatsache merken, daß in einem Dreieck der Quotient aus Seitenlänge und Sinus des gegenüberliegenden Winkels konstant ist, sondern auch die *Größe* dieser Konstante, nämlich $2R$, den Durchmesser des Umkreises des Dreiecks.