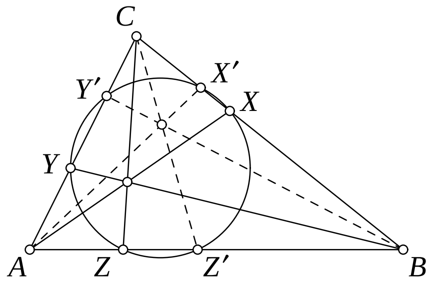
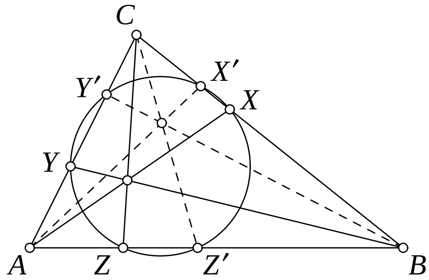
D.50 Das Dreieck $ABC$ schneide einen Kreis in den Punkten $X$, $X'$, $Y$, $Y'$, $Z$ und $Z'$. Angenommen, die Ecktransversalen $AX$, $BY$ und $CZ$ schneiden sich in einem Punkt. Beweise, daß sich dann auch $AX'$, $BY'$ und $CZ'$ in einem Punkt schneiden.



D.50 *Beweis:* (Bild) Wir müssen lediglich von der Voraussetzung $AZ \cdot BX \cdot CY = ZB \cdot XC \cdot YA$ (Satz von CEVA) auf die Behauptung $AZ' \cdot BX' \cdot CY' = Z'B \cdot X'C \cdot Y'A$ kommen, um mittels der Umkehrung des Satzes von Ceva zu schließen, daß die Ecktransversalen $AX'$, $BY'$ und $CZ'$ ebenfalls konkurrent sind. Dabei hilft natürlich der Sekantensatz:




$$AZ \cdot AZ' = YA \cdot Y'A \implies \frac{AZ}{YA} = \frac{Y'A}{AZ'},$$
$$BX \cdot BX' = ZB \cdot Z'B \implies \frac{BX}{ZB} = \frac{Z'B}{BX'},$$
$$CY \cdot CY' = XC \cdot X'C \implies \frac{CY}{XC} = \frac{X'C}{CY'}.$$

Multiplizieren wir die drei Gleichungen miteinander, ist die linke Seite nach obiger Voraussetzung gleich 1, also ebenfalls die rechte Seite. □