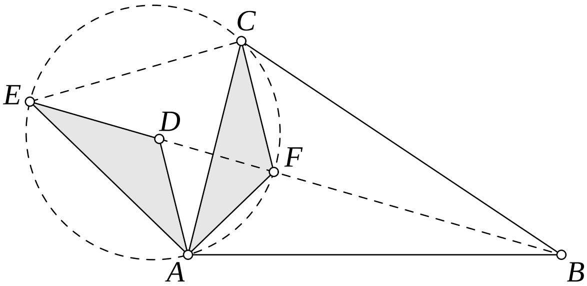
D.53 **Problem von Fermat.** Man bestimme denjenigen Punkt P innerhalb eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, für den die Summe seiner Abstände zu den Eckpunkten A, B und C möglichst klein wird.

D.53 (Bild) Wir betrachten zunächst einen willkürlich gewählten Punkt F innerhalb des Dreiecks und verbinden ihn mit A, B und C. Wenn es uns gelingt, die drei interessierenden Strecken AF, BF, CF so anzuordnen, daß sie sich aneinanderreihen und außerdem noch auf einer Geraden zu liegen kommen, wäre die Minimaleigenschaft ihrer Gesamtlänge offensichtlich und der gesuchte Punkt F gefunden. Wir wählen als Gerade diejenige, die durch die Punkte



F und B geht, und drehen das Dreieck AFC um $60°$ um A nach außen. Dadurch entsteht das Dreieck ADE. Die Dreiecke ACE und AFD sind somit gleichseitig, und es gilt für die Summe der Abstände

$$d = CF + AF + BF = ED + DF + FB.$$

Im allgemeinen wird der Weg von E nach B gebrochen sein mit Winkeln ungleich $180°$ bei D und F. Die Summe d wird minimal, wenn alle drei Teilstrecken auf einer Geraden liegen, d. h. $\measuredangle EDF = \measuredangle DFB = 180°$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\measuredangle AFB = 180° - \measuredangle AFD = 120° \text{ und } \measuredangle AFC = \measuredangle ADE = 180° - \measuredangle ADF = 120°$$

gilt. Der gesuchte sog. FERMAT-Punkt F ist somit derjenige, von dem aus jede der drei Seiten des Dreiecks unter einem Winkel von $120°$ gesehen wird. Die vier Punkte A, C, E und F bilden ein Sehnenviereck, d. h., F liegt auf dem Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ACE. Dies wird ersichtlich, wenn wir die Winkel $\measuredangle ECA = \measuredangle EFA = 60°$ betrachten. Beide sind Peripheriewinkel über der Sehne EA. Zur *Konstruktion* von F errichten wir z. B. auf der Seite AC das gleichseitige Dreieck ACE und bringen dessen Umkreis mit der Strecke EB zum Schnitt. Der zweite, von E verschiedene Schnittpunkt ist dann der FERMAT-Punkt F.