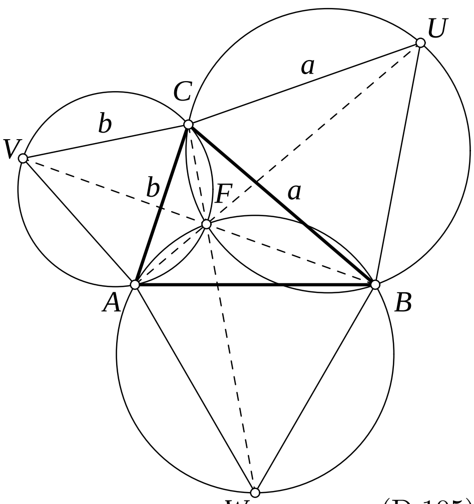
D.54 Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen drei gleichseitige Dreiecke ABW, BCU und CAV errichtet. Man zeige:

a) $AU = BV = CW$;

b) $\triangle ABC$ und $\triangle UVW$ haben denselben FERMAT-Punkt F.

D.54 *Beweis:* (Bild) a) Die beiden Dreiecke ACU und VCB sind kongruent (SWS), da sie in ihren Seiten $CU = CB \equiv a$, $AC = VC \equiv b$ sowie dem eingeschlossenen Winkel $\measuredangle ACU = \gamma + 60° = \measuredangle VCB$ übereinstimmen. Daraus folgt sofort $AU = BV$. Ebenso können wir aus der Kongruenz $\triangle VAB \cong \triangle CAW$ schließen, daß $BV = CW$ gelten muß, mithin die geforderte Gleichung. Die drei Strecken AU, BV, CW schneiden sich im Fermat-Punkt F und für die Abstände gilt: $AU = BV = CW = AF + BF + CF$ (vgl. Aufgabe D.53). □



b) Um zu zeigen, daß F ebenfalls der Fermat-Punkt des Dreiecks UVW ist, genügt es

$$\measuredangle UFV = \measuredangle VFW = \measuredangle WFU = 120° \tag{D.105}$$

nachzuweisen. Betrachten wir dazu das Sehnenviereck $AWBF$ mit $\measuredangle AFB = 120°$. Da die Bögen bzw. Sehnen AW und BW gleich sind, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\measuredangle AFW = \measuredangle BFW = 60°$. Ebenso sind FU und FV Winkelhalbierende von $\measuredangle BFC$ und $\measuredangle CFA$, woraus

$$\measuredangle AFW = \measuredangle WFB = \measuredangle BFU = \measuredangle UFC = \measuredangle CFV = \measuredangle VFA = 60°$$

und damit (D.105) folgt. □