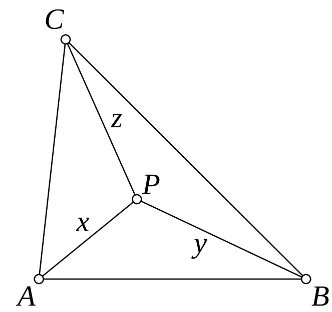
D.57 **Fagnanoscher Schwerpunktsatz.** Derjenige Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, für den die Summe der Quadrate seiner Entfernungen zu den Ecken des Dreiecks ein Minimum ist, ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

D.57 *Beweis:* (Bild) Mit den Abkürzungen $PA \equiv x$, $PB \equiv y$ und $PC \equiv z$ lautet unsere Extremwertaufgabe $x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$ Min. Die auftretenden Quadrate lassen hier die Verwendung von Vektoren als geeignet erscheinen: Schreiben wir nach Abschnitt M.1 für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} \equiv \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} \equiv \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} \equiv \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OP} \equiv \boldsymbol{p}$ (wobei O ein beliebiger Punkt ist), so finden wir mit der Abkürzung $3\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ für den zu minimierenden Ausdruck



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c})^2 \\ &= 3p^2 - 2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 3p^2 - 6\boldsymbol{pg} + 3g^2 - 3g^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{g})^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 3g^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck nimmt offensichtlich ein Minimum an, wenn die runde Klammer verschwindet (die restlichen Terme sind unabhängig von $\boldsymbol{p}$), also für $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g}$. Nach Abschnitt M.1 ist $\boldsymbol{g}$ aber leicht als Ortsvektor zum Schwerpunkt des Dreiecks zu identifizieren. □