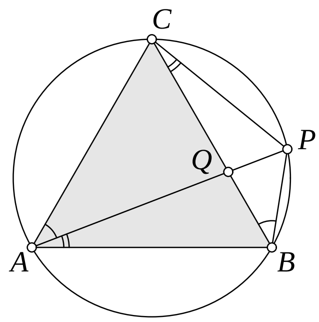
D.6 Auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC liege ein Punkt P, der nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt. Die Sehne AP schneide die Seite BC in Q. Man zeige, daß gilt:

a) $\dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC} = \dfrac{1}{PQ}$, b) $PB + PC = PA$.

D.6 *Beweis:* (Bild) $ABPC$ ist ein Sehnenviereck, dessen Diagonalen sich in Q schneiden und die das Viereck in vier Dreiecke zerlegen. Dann sind die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke ähnlich (vgl. Aufgabe V.23): $\triangle BPQ \sim \triangle ACQ$ sowie $\triangle CPQ \sim \triangle ABQ$.



a) Daher können wir mit $AB = BC = CA \equiv a$ folgende Verhältnisgleichungen aufstellen: $PQ/PB = CQ/a$ und $PQ/PC = BQ/a$, deren Addition

$$\frac{PQ}{PB} + \frac{PQ}{PC} = \frac{CQ + BQ}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

ergibt. Anschließende Division durch PQ führt auf die Behauptung.
b) Der zweite Teil läßt sich am einfachsten mit dem Satz des Ptolemäus (s. Aufgabe V.26) zeigen: Aus

$$AC \cdot PB + AB \cdot PC = BC \cdot PA$$

folgt nach Division durch a die zweite behauptete Gleichung. $\square$