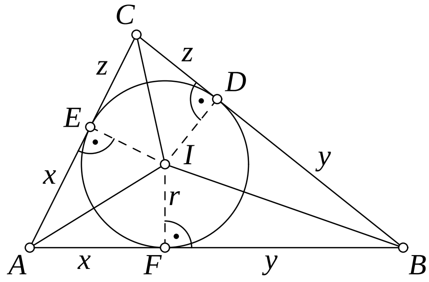
D.63 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus Inkreisradius r und halben Umfang $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$:

$$\varDelta = rs. \tag{D.6}$$

D.63 *Beweis:* (Bild) Der Mittelpunkt I des Inkreises zerlegt die Dreiecksfläche in drei Teildreiecke ABI, BCI und CAI. Bezeichnen wir die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten BC, CA, AB mit D, E, F, so sind



$$ID = IE = IF = r$$

offenbar gerade die Höhen dieser Teildreiecke, da die Berührungsradien stets senkrecht auf den tangierenden Seiten stehen. Darüber hinaus sind die Strecken $AE = AF \equiv x$, $BF = BD \equiv y$ sowie $CD = CE \equiv z$ hier Tangentenabschnitte von paarweise gleicher Länge, so daß mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = x+y+z$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta &= [ABI] + [BCI] + [CAI] = \frac{1}{2}\big[(x+y)r + (y+z)r + (z+x)r\big] \\ &= \frac{1}{2}r \cdot 2(x+y+z) = rs. \ \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Die drei Gleichungen $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$ ergeben – aufgelöst nach den Abschnitten x, y, z – die oft nützlichen Beziehungen (vgl. Abschnitt G.1.1)

$$x = \frac{1}{2}(b+c-a), \quad y = \frac{1}{2}(c+a-b), \quad z = \frac{1}{2}(a+b-c).$$