D.71 **Satz von Steiner-Lehmus.** Jedes Dreieck mit zwei gleich langen Winkelhalbierenden ist gleichschenklig.

D.71 *Beweis:* Nach Aufgabe D.70 b und der Voraussetzung $w_a = w_b$ gilt:

$$w_a^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] = ca\left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right] = w_b^2$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= (a-b) + \left[\frac{a^2b}{(b+c)^2} - \frac{ab^2}{(c+a)^2}\right] = (a-b) + \frac{a^2b(c+a)^2 - ab^2(b+c)^2}{(b+c)^2(c+a)^2} \\ &= (a-b)\left[1 + ab\frac{c^2 + 2c(a+b) + a^2 + b^2}{(b+c)^2(c+a)^2}\right]. \end{aligned}$$

Da der zweite (positive) Faktor nicht verschwinden kann, folgt zwangsläufig $a = b$. $\square$