D.75 Für den Abstand zwischen dem Umkreismittelpunkt und dem Höhenschnittpunkt eines Dreiecks gilt:

$$OH^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{D.15}$$

D.75 *Beweis:* Wir brauchen nur $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (s. Aufgabe M.2) zu quadrieren:

$$OH^2 = \overrightarrow{OH}^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = 3\,R^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA})$$

Die Summe der Quadrate auf der rechten Seite ist dabei wegen $OA = OB = OC = R$ gleich $3\,R^2$, und für die gemischten Skalarprodukte finden wir mit Hilfe der Definition des Skalarproduktes ($\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi$), des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes ($\varphi = 2\gamma$) und des Kosinussatzes ($2\,R^2 - c^2 = 2\,R^2 \cos 2\gamma$):

$$2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\,R^2 \cos 2\gamma = 2\,R^2 - c^2, \qquad 2\,\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2\,R^2 \cos 2\alpha = 2\,R^2 - a^2,$$
$$2\,\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 2\,R^2 \cos 2\beta = 2\,R^2 - b^2 \qquad \Longrightarrow \qquad OH^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \ \square$$