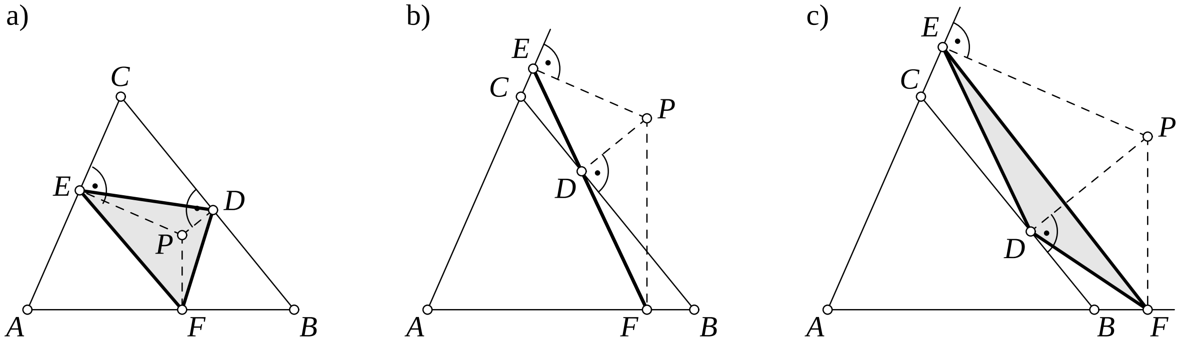
D.81 P sei ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC. Das Lotfußpunktdreieck von P hat dann die Seitenlängen

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R},$$

wobei x, y, z die Abstände von P zu den Eckpunkten A, B, C und R der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist.

D.81 *Beweis:* Mit D, E als Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA gilt für die Winkel $\measuredangle PDC = \measuredangle PEC = 90°$, d. h., die Punkte P, D, C, E liegen sämtlich auf einem Kreis mit $CP \equiv z$ als Durchmesser (Bild a). Nun können wir den Sinussatz in seiner erweiterten



Form (vgl. Aufgabe D.5) bezüglich des Winkels $\measuredangle BCA \equiv \gamma$ einmal auf das Dreieck EDC, zum anderen auf $\triangle ABC$ anwenden:

$$\frac{DE}{\sin\gamma} = z \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Eliminieren wir hieraus $\sin\gamma$, so folgt die Seitenlänge $DE = z\sin\gamma = cz/(2R)$. Analog verfahren wir mit den beiden anderen Sehnenvierecken $PEAF$ und $PFBD$ und erhalten

$$EF = x\sin\alpha = \frac{by}{2R} \qquad \text{bzw.} \qquad FD = y\sin\beta = \frac{ax}{2R}. \;\square$$

Bemerkung: Auch im Falle, daß einige der Lotfußpunkte auf den Verlängerungen der Seiten liegen (Bild b,c) bleibt das Ergebnis dasselbe; wir haben im $\triangle EDC$ lediglich den Supplementwinkel $\measuredangle BCE = 180° - \gamma$ zu nehmen, wobei bekanntlich $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$ gilt. In Bild b entartet das Lotfußpunktdreieck gerade zur SIMSON-Geraden (vgl. Aufgabe D.45).