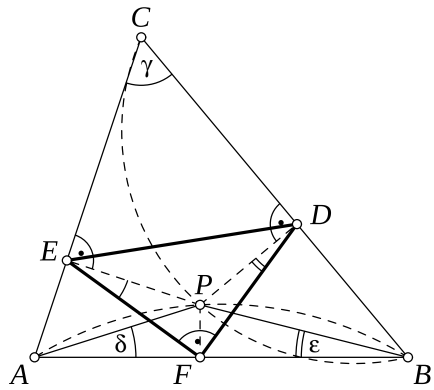
D.82 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Wie ist ein Punkt P im Innern zu wählen, damit dessen Lotfußpunktdreieck gleichschenklig und rechtwinklig wird?

D.82 (Bild) Wir haben hier zwar nicht so viel rechte Winkel wie beim Höhenfußpunktdreieck, aber diejenigen an den Lotfußpunkten D, E und F reichen schon, um drei Sehnenvierecke zu erkennen: $PEAF$, $PFBD$ und $PDCE$. In ihnen sind die Strecken PA, PB, PC jeweils Durchmesser. Und wo Sehnenvierecke sind, gibt es auch (gleiche) Peripheriewinkel. Nehmen wir o. B. d. A. an, daß das $\triangle DEF$ seinen rechten Winkel bei F hat und bezeichnen $\measuredangle PAF \equiv \delta$ und $\measuredangle PBF \equiv \varepsilon$, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz



$$\measuredangle PEF = \delta, \quad \measuredangle PDF = \varepsilon.$$

Aus der Innenwinkelsumme im Viereck $CEFD$ folgt nun $\delta + \varepsilon = 90° - \gamma$. Für $\measuredangle EFD = 90°$ ist also $\measuredangle APB = 180° - (\delta + \varepsilon) = 90° + \gamma$ notwendig. P liegt somit auf einem Kreisbogen, den wir nach Aufgabe A.21 konstruieren können. Ferner ist aufgrund der geforderten Gleichschenkligkeit des Lotfußpunktdreiecks $\measuredangle DEF = \measuredangle EDF = 45°$ vorgegeben. Mit demselben Argument finden wir als zweiten geometrischen Ort für P einen Kreisbogen mit $\measuredangle BPC = 45° + \alpha$.