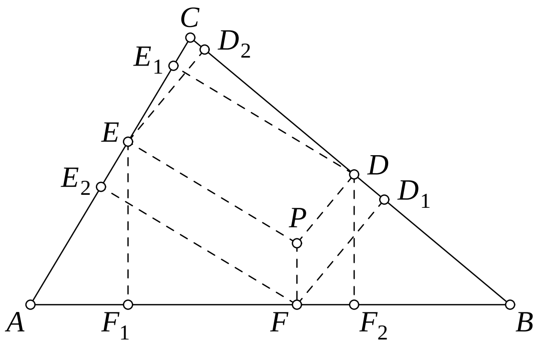
D.83 **Satz von Erdös-Mordell.** Ist P ein beliebiger Punkt im Dreieck ABC und sind D, E, F die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA und AB, so gilt:

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF). \tag{D.16}$$

D.83 *Beweis:* (Bild) Seien D_1, D_2 die Lotfußpunkte von F bzw. E auf BC; entsprechend seien die Punkte E_1, E_2 und F_1, F_2 auf den anderen Seiten erklärt. Aus Aufgabe D.82 wissen wir, daß z. B. $PFBD$ ein Sehnenviereck ist. Daher ist $\measuredangle FDB = \measuredangle FDD_1 = \measuredangle FPB$ und die rechtwinkligen Dreiecke FDD_1 und BPF sind ähnlich. Daraus folgt für die Länge



$$D_1D = \frac{PF}{PB} \cdot FD.$$

Dieses Argument können wir insgesamt sechsmal verwenden, was wir an dieser Stelle auch ausführlich hinschreiben:

$$\begin{aligned}
&\measuredangle DFB = \measuredangle DFF_2 = \measuredangle DPB &&\Longrightarrow \triangle DFF_2 \sim \triangle BPD &&\Longrightarrow FF_2 = \tfrac{PD}{PB} \cdot FD,\\
&\measuredangle DEC = \measuredangle DEE_1 = \measuredangle DPC &&\Longrightarrow \triangle DEE_1 \sim \triangle CPD &&\Longrightarrow E_1E = \tfrac{PD}{PC} \cdot DE,\\
&\measuredangle EDC = \measuredangle EDD_2 = \measuredangle EPC &&\Longrightarrow \triangle EDD_2 \sim \triangle CPE &&\Longrightarrow DD_2 = \tfrac{PE}{PC} \cdot DE,\\
&\measuredangle EFA = \measuredangle EFF_1 = \measuredangle EPA &&\Longrightarrow \triangle EFF_1 \sim \triangle APE &&\Longrightarrow F_1F = \tfrac{PE}{PA} \cdot EF,\\
&\measuredangle FEA = \measuredangle FEE_2 = \measuredangle FPA &&\Longrightarrow \triangle FEE_2 \sim \triangle APF &&\Longrightarrow EE_2 = \tfrac{PF}{PA} \cdot EF.
\end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir unseren Zielausdruck und schätzen ihn mit einem Trick nach unten ab:

$$PA + PB + PC \geq PA \cdot \frac{D_1D + DD_2}{EF} + PB \cdot \frac{E_1E + EE_2}{FD} + PC \cdot \frac{F_1F + FF_2}{DE}.$$

Dies ist offenbar richtig, da z. B. D_1D_2EF ein Trapez mit benachbarten rechten Winkeln bei D_1 bzw. D_2 ist und die gegenüberliegende Seite EF nur die minimale Länge D_1D_2 haben kann. Analog gilt $FD \geq E_1E_2$ und $DE \geq F_1F_2$. Setzen wir nun die gefundenen Streckenlängen für D_1D, DD_2 usw. in die bisherige Ungleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
PA + PB + PC \geq{}& \left(\frac{PB \cdot DE}{PC \cdot FD} + \frac{PC \cdot FD}{PB \cdot DE}\right) PD + \left(\frac{PC \cdot EF}{PA \cdot DE} + \frac{PA \cdot DE}{PC \cdot EF}\right) PE\\
&+ \left(\frac{PA \cdot FD}{PB \cdot EF} + \frac{PB \cdot EF}{PA \cdot FD}\right) PF.
\end{aligned}$$

Der Rest ist wieder einfach: die Klammerausdrücke haben die Form $x + \frac{1}{x}$ und sind damit sämtlich größer oder gleich 2:

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF). \quad \square$$