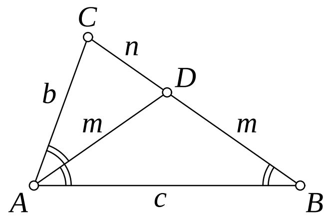
$\boxed{\textsf{D.91}}$ Man zeige, daß in einem Dreieck ABC folgende Bedingungen einander äquivalent sind:

$$\alpha = 2\,\beta \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = b(b+c). \tag{D.17}$$

D.91 *Beweis:* (Bild) AD sei die Winkelhalbierende mit D auf der Seite BC. Wird $\alpha = 2\beta$ vorausgesetzt, ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AD = BD \equiv m = ca/(b+c)$ (s. Aufgabe D.8). Nach dem Satz von STEWART (D.12) gilt nun mit $n = a - m$:



$$a(m^2 + mn) = mb^2 + nc^2 = (b^2 - c^2)m + ac^2,$$

$$a^2 m = (b^2 - c^2)m + ac^2,$$

$$a^2 = (b-c)(b+c) + \frac{ac^2(b+c)}{ac} = b(b+c).$$

Wird umgekehrt $a^2 = b(b+c) = b^2 + bc$ vorausgesetzt, erhalten wir mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\cos\alpha = \frac{c^2 - (a^2 - b^2)}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} - 1\right) \quad \text{sowie} \quad \cos\beta = \frac{c^2 + (a^2 - b^2)}{2ca} = \frac{b+c}{2a}.$$

Daraus folgt weiter

$$4\cos^2\beta - 2 = \frac{(b+c)^2}{a^2} - 2 = \frac{b+c}{b} - 2 = \frac{c}{b} - 1 = 2\cos\alpha.$$

Da die Kosinusfunktion in $[0, \pi]$ eineindeutig ist, folgt aus dem Additionstheorem $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ die Behauptung $\alpha = 2\beta$. $\square$

Bemerkung: Ebenso gelten die analogen Beziehungen: $\beta = 2\gamma \iff b^2 = c(c+a)$ usw.