D.93 **Eulersche Gerade.** In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt G und der Umkreismittelpunkt O auf einer Geraden mit $HG : OG = 2 : 1$.

D.93 *Beweis:* (Bild) D und F seien die Höhenfußpunkte von A bzw. C sowie K und L die Seitenmitten von BC bzw. AB. Wir zeigen zunächst: $\triangle AHC \sim \triangle KOL$, wofür die Kongruenz zweier Innenwinkel genügt. Diese findet sich schnell mit $\measuredangle HCA = \measuredangle OLK$ und $\measuredangle CAH = \measuredangle LKO$. Wegen $KL \parallel CA$ (Umkehrung des ersten Strahlensatzes) und $OL \parallel HC$ folgt die Gleichheit des ersten Winkelpaares und wegen $KL \parallel CA$ und $KO \parallel AH$ die Gleichheit des zweiten. Außerdem gelten wegen $CA = 2\,KL$ die Gleichungen $HC = 2\,OL$ und $HA = 2\,OK$. Beide Dreiecke sind also mit dem Maßstabsfaktor 2 ähnlich. Nun verbinden wir H mit O und bezeichnen den Schnittpunkt mit der Seitenhalbierenden CL mit G'. Dann sind $\triangle CHG' \sim \triangle LOG'$ ebenfalls ähnlich, da $\measuredangle G'CH = \measuredangle G'LO$ (Wechselwinkel) und $\measuredangle HG'C = \measuredangle OG'L$ (Scheitelwinkel). Wegen $HC = 2OL$ (s. o.) muß auch $CG = 2LG$ gelten, d. h., G' ist nach Aufgabe D.10 identisch mit dem Schwerpunkt G. Daraus folgt, daß H, G und O auf einer Geraden liegen und G die Strecke OH im Verhältnis $1:2$ teilt. $\square$