

**G.1** Es gelten folgende Relationen in den elementaren symmetrischen Funktionen der Seitenlängen  $a, b, c$  bzw. Tangentenabschnitte  $x, y, z$ :

$$\sigma_1 \equiv a + b + c = 2s, \tag{G.5}$$

$$\sigma_2 \equiv bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2, \tag{G.6}$$

$$\sigma_3 \equiv abc = 4Rrs, \tag{G.7}$$

$$\tau_1 \equiv x + y + z = s, \tag{G.8}$$

$$\tau_2 \equiv yz + zx + xy = r(4R + r), \tag{G.9}$$

$$\tau_3 \equiv xyz = r^2s. \tag{G.10}$$

**G.1** *Beweis:* Folgende Beziehungen lassen sich mit einfachen Betrachtungen herleiten:

$$a = 2R \sin \alpha = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{erweiterter Sinussatz (D.1), Aufgabe D.5})$$

$$s - a = r \cot \frac{\alpha}{2} \quad (\text{s. Lösung zur Aufgabe D.63}).$$

Nach Division und Multiplikation beider Gleichungen folgt daraus

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{ar}{4R(s-a)}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a(s-a)}{4Rr}.$$

Der „trigonometrische Pythagoras“  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$  führt nun auf die kubische Gleichung

$$a^3 - 2sa^2 + (s^2 + 4Rr + r^2)a - 4Rrs = 0; \quad (\text{G.101})$$

völlig analoge Gleichungen ergeben sich für  $b$  und  $c$ . Das bedeutet, daß  $a$ ,  $b$  und  $c$  Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind. Mit Hilfe des VIETASchen Wurzelsatzes lesen wir daraus unmittelbar die behaupteten Relationen (G.5) ab.

Um die Gleichungen (G.6) abzuleiten, setzen wir einfach  $a = y + z = s - x$  in (G.101) ein. Es folgt die kubische Gleichung

$$x^3 - sx^2 + r(4R + r)x - r^2s = 0$$

(sowie analoge in  $y, z$ ), aus denen mit Hilfe des VIETASchen Wurzelsatzes (G.6) folgt.  $\square$