

G.12 Man beweise

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad (\text{G.12})$$

und bestimme, wann Gleichheit auftritt.
(*APMO, 1996*)

G.12 *Beweis:* Die Substitution (G.4) führt hier auf

$$\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}. \quad (\text{G.102})$$

Nach der Methode „Teile und (be)herrsche“ (s. Abschnitt U.3.1) finden wir weiter:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, & (\text{G.103}) \\ 2\sqrt{xy} &\leq x + y, \\ x + 2\sqrt{xy} + y &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y), \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \sqrt{2}\sqrt{x+y}. \end{aligned}$$

Zyklische Vertauschung und Addition ergibt (G.102). Wegen (G.103) und der entsprechenden anderen Gleichungen gilt Gleichheit nur für $x = y = z$, d. h. für alle *gleichseitigen* Dreiecke. \square