

G.13 Angenommen, a , b , c seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige, daß gilt:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc. \quad (\text{G.13})$$

(6. IMO, UdSSR, Moskau, 1964)

G.13 *Beweis:* Die Einschränkung, daß a , b und c die Seiten eines Dreiecks sind (und damit die Dreiecksungleichungen erfüllen müssen) ist unnötig, denn wir können zeigen, daß die Behauptung für *alle* positiven reellen Zahlen a , b , c gilt: Nach der SCHURschen Ungleichung (U.40) (s. Aufgabe U.25) ist nämlich für $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} & a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0, \\ \implies & 3abc - (a^2b + a^2c - a^3) - (b^2c + b^2a - b^3) - (c^2a + c^2b - c^3) \geq 0, \\ \implies & 3abc \geq a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c). \quad \square \end{aligned}$$