

G.14 Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Beweise

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \tag{G.14}$$

und bestimme, in welchem Fall Gleichheit auftritt.

(24. IMO, Frankreich, Paris, 1983)

G.14 *Beweis:* Mit unserer Substitution $a \equiv y + z$, $b \equiv z + x$, $c \equiv x + y$ überführen wir die behauptete Ungleichung in

$$(y + z)^2(z + x)(y - x) + (z + x)^2(x + y)(z - y) + (x + y)^2(y + z)(x - z) \geq 0,$$

welche nach auswucherndem Ausmultiplizieren glücklicherweise durch gegenseitige Auslöschung der meisten Terme in

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x + y + z) \quad (\text{G.104})$$

übergeht. Dieses Resultat ist ein guter Kandidat für die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, und zwar vom Typ d) mit $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ bzw. $\mathbf{v}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (s. Abschnitt U.2.2). Da sie durch zyklische Vertauschung der Variablen unverändert bleibt, genügt es, allein den ersten Term auf der linken Seite zu betrachten:

$$u_1^2 = xy^3. \quad (\text{G.105})$$

Für u_1v_1 haben wir nun auf der rechten Seite drei Möglichkeiten:

$$u_1v_1 = \begin{cases} x^2yz \\ xy^2z \\ xyz^2 \end{cases} \quad \text{denen mit (G.104)} \quad v_1^2 = \begin{cases} x^3y^{-1}z^2 \\ xyz^2 \\ xy^{-1}z^4 \end{cases}$$

entspricht. Wir erkennen Übereinstimmung (links unten und rechts Mitte, d. h. es ist somit $\mathbf{u} = (\sqrt{xy^3}, \sqrt{yz^3}, \sqrt{zx^3})$, $\mathbf{v} = (z\sqrt{xy}, x\sqrt{yz}, y\sqrt{zx})$) und sind damit schon fertig. \square