

G.15 Beweise, daß mit a, b, c als Seitenlängen eines Dreiecks folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a}. \quad (\text{G.15})$$

(Polen, 1993)

G.15 *Beweis:* Aus der Behauptung wird mit (G.2) und (G.15)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}, \quad (\text{G.106})$$

die ein Kandidat für ein Aufteilen ist. Versuchen wir es also mit

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{1}{x+y} \quad (\text{G.107})$$

und deren zyklischen Vertauschungen, die addiert offenbar wieder (G.106) ergeben. (G.107) ist nach kurzer Rechnung jedoch nichts anderes als die „Mutter“ aller Ungleichungen: $(x-y)^2 \geq 0$.

□