

G.16 a, b, c seien die Seitenlängen eines nichtstumpfwinkligen Dreiecks. Dann gilt:

$$a + b + c \geq \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \quad (\text{G.16})$$

G.16 *Beweis:* Die Bedingung, daß alle Innenwinkel nichtstumpfwinklig sind, garantiert, daß alle Radikanden nichtnegativ sind und die Wurzeln damit existieren. Dann gilt nach der RMS-Ungleichung:

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{\frac{(b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2)}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} \right), \\a &= \sqrt{\frac{(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{c^2 + a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \right), \\b &= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \right),\end{aligned}$$

und folglich nach deren Addition die behauptete Ungleichung. \square